

Victor Martins Gomes

**Análise da atenuação de ruídos
via transformada Curvelet em
dados sísmicos pós-empilhamento**

Brasil

29 de dezembro de 2017

Victor Martins Gomes

**Análise da atenuação de ruídos
via transformada Curvelet em
dados sísmicos pós-empilhamento**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Dinâmica dos Oceanos e da Terra da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências (M. Sc.). Área de concentração: Geofísica.

Universidade Federal Fluminense
Departamento de Geologia e Geofísica
Programa de Pós-Graduação

Orientador: Marco Antonio Cetale Santos

Brasil
29 de dezembro de 2017

Victor Martins Gomes

Análise da atenuação de ruídos
via transformada Curvelet em
dados sísmicos pós-empilhamento/ Victor Martins Gomes. – Brasil, 29 de dezembro
de 2017-

173 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Marco Antonio Cetale Santos

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Fluminense
Departamento de Geologia e Geofísica
Programa de Pós-Graduação, 29 de dezembro de 2017.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. 2. Palavra-chave3. I. Marco Antonio Cetale Santos. II. Universidade Federal Fluminense. III. Departamento de Geologia e Geofísica. IV. Análise da atenuação de ruídos via transformada Curvelet em dados sísmicos pós-empilhamento

Victor Martins Gomes

**Análise da atenuação de ruídos
via transformada Curvelet em
dados sísmicos pós-empilhamento**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Dinâmica dos Oceanos e da Terra da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências (M. Sc.). Área de concentração: Geofísica.

Trabalho aprovado. Brasil, 21 de Dezembro de 2017:

Marco Antonio Cetale Santos
Orientador

Denis Lage Ferreira da Silva
Convidado 1

Djalma Manoel Soares Filho
Convidado 2

Rodrigo Bird Burgos
Convidado 3

Marcilio Castro de Matos
Convidado 4

Henrique Bueno dos Santos
Convidado 5

*“In research, the horizon recedes as we advance,
and is no nearer at 60 than it was at 20.
As the power of endurance weakens with age,
the urgency of pursuit grows more intense...
and research is always incomplete.”
(Mark Pattison, 1875)*

Resumo

A estimativa de parâmetros físicos a partir dos dados sísmicos é extremamente sensível à presença de ruído. Desta forma, grande esforço é dedicado ao condicionamento dos dados previamente às técnicas de inversão. Esta necessidade tem motivado o desenvolvimento de métodos cada vez mais sofisticados. Diversas abordagens existem, aqui tratam-se metodologias baseadas na transformada Curvelet. Localmente, curvelets podem ser vistas como frentes de onda plana. Além disso, permitem uma representação esparsa ótima de eventos sísmicos. Consequentemente, é apropriada ao tratamento de sinais sísmicos. No presente trabalho, compara-se a performance de três metodologias para atenuação dos ruídos em seções sísmicas 2D, a primeira de truncamento abrupto e as outras duas, suave. Consideram-se tanto dados controlados, quanto reais — dois terrestres e um marinho. Como critério quantitativo, adotam-se duas técnicas de inversão acústica do traço, uma vez que modelos consistentes somente serão estimados quando as amplitudes do sinal forem devidamente recuperadas. Os testes demonstraram que os três métodos são capazes de atenuar o ruído e recuperar as amplitudes do sinal não corrompido, o que por sua vez, levou a boas estimativas quando da inversão.

Palavras-chave: Transformada Curvelet. Sísmica. Atenuação de ruídos.

Abstract

The estimation of physical parameters from the seismic data is extremely sensitive to the presence of noise. In this way, great effort is dedicated to conditioning the data prior to applying inversion techniques. This has motivated the development of increasingly sophisticated methods. Several approaches exist, here we treat methodologies based on the Curvelet transform. Locally, curvelets can be seen as plane wave fronts. In addition, they lead to an optimal sparse representation of seismic events. Consequently, it is suitable for the treatment of seismic signals. In this work, performance of three methodologies for noise attenuation in 2D seismic sections, was analysed. The first involves hard thresholding and the other two, soft. Both controlled and actual data are considered: two terrestrial and one marine. As a quantitative criterion, two techniques of acoustic inversion of the trace are adopted, since consistent models are only estimated when as amplitudes of the signal with properly recovered. The tests demonstrated that all three methods are capable of attenuating noise and recovering the uncorrupted signal amplitudes, which, consequently, lead to good estimates upon inversion.

Keywords: Curvelet transform. Seismic. Noise suppression.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação esquemática da segmentação do plano de frequências associada à transformada Curvelet. Cada janela em cunha equivale a uma função curvelet no espaço.	29
Figura 2 – Exemplo de função C^∞ satisfazendo as condições 1.5.	30
Figura 3 – Representação espacial (a) e em frequência (b) de 5 curvelets. A numeração aumenta com a escala a que se refere. Em (b) também é destacado o efeito de falseamento, inerente às curvelets da escala de maior detalhe.	34
Figura 4 – Partição do domínio de Fourier associada à curvelets digitais. O espectro é seccionado em trapezóides, exceto nas regiões limitadas pelas linhas em azul, os cantos. O quadrado preto, central, representa a banda de menores frequências e a região hachurada, detalha um dos trapezóides.	35
Figura 5 – Decomposição curvelet de uma imagem teste (a), 2048×2048 , em 4 escalas, com 16 orientações na banda de menor detalhe. Em (b), cores mais escuras são mais próximas de 0, as linhas representam o limite entre quadrantes e a escala das sub-bandas aumenta com a distância do centro da imagem, onde está localizada a componente passa-baixa.	39
Figura 6 – Histograma, com 500 intervalos, dos coeficientes curvelet significantes (a), e insignificantes (b), em sub-banda da escala de maior detalhe, para a imagem <i>Lena</i> . As fdps sobrepostas aos histogramas, descritas pelas linhas tracejada e contínua, representam as funções estimadas para os coeficientes sem ruído ($f(\tilde{\mathbf{c}}_i H^0)$ e $f(\tilde{\mathbf{c}}_i H^1)$) e com ($f(\mathbf{c}_i H^0)$ e $f(\mathbf{c}_i H^1)$), respectivamente.	45
Figura 7 – Variação da estimativa do nível de ruído, para cada sub-banda, em função do número de simulações Monte-Carlo com conjunto de imagens de ruído branco $\sim \mathcal{N}(\mu = 0, 1)$. Na legenda, j refere-se à escala curvelet, PBSKCURV ao valor utilizado pelo <i>ProbShrinkCurv</i> e ~ 0.37285 é o valor esperado, considerando a redundância da transformada.	52
Figura 8 – Seção sísmica Marmousi, extraída de uma seção empilhada, em tempo, do Marmousi2. Também são mostrados seus espectros de amplitude e F-K.	59

Figura 9 – Marimba, uma seção extraída de um conjunto de dados, associado ao campo de petróleo Marimbá, na bacia de Campos. Seus espectros de frequência e F-K são mostrados na parte direita. Observa-se, que a alta resolução permite uma fácil distinção dos eventos sísmicos. Diretamente associado à resolução, também, é a banda sísmica bem definida, característica de sinais sintéticos ou com ruído reduzido de forma ótima.	61
Figura 10 – Seção Realland, relativa a um dado empilhado, no tempo, adquirido nas proximidades da Lagoa Salgada, no litoral norte fluminense. Eventos sísmicos são visíveis somente até ~ 0.5 segundos e, é notável a presença de ruído ao longo de toda a imagem.	62
Figura 11 – USGSland, extraída da linha 36X-75, do arquivo de dados da Reserva Nacional de Petróleo do Alaska. A presença de ruído é marcante ao longo de todo o dado. Destacam-se os artefatos verticais na parte superior e a pronunciada descontinuidade no canto inferior direito, uma, entre as várias que contribuem para energia observada nas frequências próximas a zero.	63
Figura 12 – Seção USGSmar, correspondendo à linha, empilhada no tempo, de número 25 do conjunto de dados sísmicos multicanal 1978-015-FA. Foi adquirida em 1978, na plataforma continental do Atlântico norte, nos Estados Unidos. Também são mostrados seus espectro de amplitude e F-K.	64
Figura 13 – Aplicação da métrica SSIM no Marmousi corrompido por ruído AWGN (a). A única diferença entre (b) e (d) é o tamanho da janela utilizada para cálculo das estatísticas utilizadas em SSIM. (c) Mostra a fusão de (a) e (b) pelo canal alpha, destacando os eventos visualmente expressivos em (a), considerando o Marmousi não corrompido.	69
Figura 14 – Plano F-K da seção Marmousi com ruído: branco (primeira coluna), de banda limitada a $[0\ 20]$ Hz (segunda coluna) e com espectro para frequências maiores que 30 Hz (terceira coluna). A energia do ruído é a mesma para todas as imagens. O desvio padrão, por outro lado, apresenta pequena variação.	71
Figura 15 – Divisão do Marmousi em quatro partes de mesma dimensão.	74
Figura 16 – Partição do Marimba em seções de tamanhos iguais.	75
Figura 17 – marm2	76
Figura 18 – marm3	77
Figura 19 – marim1	77
Figura 20 – marim4	77

Figura 21 – Variação do limiar de corte para a filtragem do Marmousi completo pela metodologia <i>ksigma</i>	81
Figura 22 – Variação do limiar de corte para a filtragem do Marimba completo pela metodologia <i>ksigma</i>	81
Figura 23 – Resultados da filtragem do marm1 pela metodologia <i>ksigma</i> , em função do limiar de corte.	82
Figura 24 – Resultados da filtragem do marm2 pela metodologia <i>ksigma</i> , em função do limiar de corte.	82
Figura 25 – Resultados da filtragem do marm3 pela metodologia <i>ksigma</i> , em função do limiar de corte.	82
Figura 26 – Resultados da filtragem do marm4 pela metodologia <i>ksigma</i> , em função do limiar de corte.	83
Figura 27 – Resultados da filtragem do marim1 pela metodologia <i>ksigma</i> , em função do limiar de corte.	83
Figura 28 – Resultados da filtragem do marim2 pela metodologia <i>ksigma</i> , em função do limiar de corte.	83
Figura 29 – Resultados da filtragem do marim3 pela metodologia <i>ksigma</i> , em função do limiar de corte.	84
Figura 30 – Resultados da filtragem do marim4 pela metodologia <i>ksigma</i> , em função do limiar de corte.	84
Figura 31 – Variação do limiar de corte para a filtragem do Marmousi completo pela metodologia <i>AdaptShrinkCurv</i>	84
Figura 32 – Variação do limiar de corte para a filtragem do Marimba completo pela metodologia <i>AdaptShrinkCurv</i>	85
Figura 33 – Resultados da filtragem do marm1 pela metodologia <i>AdaptShrinkCurv</i> , em função do limiar de corte.	85
Figura 34 – Resultados da filtragem do marm2 pela metodologia <i>AdaptShrinkCurv</i> , em função do limiar de corte.	85
Figura 35 – Resultados da filtragem do marm3 pela metodologia <i>AdaptShrinkCurv</i> , em função do limiar de corte.	86
Figura 36 – Resultados da filtragem do marm4 pela metodologia <i>AdaptShrinkCurv</i> , em função do limiar de corte.	86
Figura 37 – Resultados da filtragem do marim1 pela metodologia <i>AdaptShrinkCurv</i> , em função do limiar de corte.	86
Figura 38 – Resultados da filtragem do marim2 pela metodologia <i>AdaptShrinkCurv</i> , em função do limiar de corte.	87
Figura 39 – Resultados da filtragem do marim3 pela metodologia <i>AdaptShrinkCurv</i> , em função do limiar de corte.	87

Figura 40 – Resultados da filtragem do marim4 pela metodologia <i>AdaptShrinkCurv</i> , em função do limiar de corte.	87
Figura 41 – Resultado da remoção de ruídos com metodologia <i>ksigma</i> , na seção Marmousi corrompida com ruído de baixa $\sigma_r = 10$. O nível de corte c associado foi de 3 vezes o nível do ruído, valor inferior ao melhor, gráfico 21.	88
Figura 42 – Resultado da remoção de ruídos com metodologia <i>ksigma</i> , na seção Marmousi corrompida com ruído de baixa $\sigma_r = 10$. O nível de corte c associado foi de 6 vezes o nível do ruído, o que levou ao maior valor PSNR, no gráfico 21.	88
Figura 43 – Resultado da remoção de ruídos com metodologia <i>ksigma</i> , na seção Marmousi corrompida com ruído de baixa $\sigma_r = 10$. O nível de corte c associado foi de 7 vezes o nível do ruído, valor relativamente maior que o ótimo em termos PSNR, gráfico 21.	89
Figura 44 – Marmousi corrompido por ruído branco $\sigma_r = 20$	90
Figura 45 – Remoção de ruídos na seção 44 utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c). Tais resultados referem-se aos gráficos 21 e 31, respectivamente. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).	90
Figura 46 – Marmousi corrompido por ruído de baixa $\sigma_r = 20$	91
Figura 47 – Remoção de ruídos na seção 46 utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c). Tais resultados referem-se aos gráficos 21 e 31, respectivamente. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).	91
Figura 48 – Marmousi corrompido por ruído de alta $\sigma_r = 20$	92
Figura 49 – Remoção de ruídos na seção 48 utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c). Tais resultados referem-se aos gráficos 21 e 31, respectivamente. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).	92
Figura 50 – Marimba corrompido por ruído branco $\sigma_r = 20$	93
Figura 51 – Remoção de ruídos na seção 50 utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c). Tais resultados referem-se aos gráficos 22 e 32, respectivamente. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).	93
Figura 52 – Marimba corrompido por ruído de baixa $\sigma_r = 20$	94
Figura 53 – Remoção de ruídos na seção 52 utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c). Tais resultados referem-se aos gráficos 22 e 32, respectivamente. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).	94

Figura 54 – Marimba corrompido por ruído de alta $\sigma_r = 20$	95
Figura 55 – Remoção de ruídos na seção 54 utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c). Tais resultados referem-se aos gráficos 22 e 32, respectivamente. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).	95
Figura 56 – Marmousi corrompido por ruído de alta $\sigma_r = 50$	96
Figura 57 – Remoção de ruídos na seção 56 utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c). Tais resultados referem-se aos gráficos 21 e 31, respectivamente. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).	97
Figura 58 – Marimba corrompido por ruído de alta $\sigma_r = 50$	97
Figura 59 – Remoção de ruídos na seção 58 utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c). Tais resultados referem-se aos gráficos 22 e 32, respectivamente. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).	98
Figura 60 – Remoção de ruídos na seção 44, utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c), aplicados individualmente às partições marm1, marm2, marm3 e marm4. Tais resultados referem-se aos gráficos 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35 e 36. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural, imagens (b) e (d).	99
Figura 61 – Remoção de ruídos na seção 46, utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c), aplicados individualmente às partições marm1, marm2, marm3 e marm4. Tais resultados referem-se aos gráficos 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35 e 36. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural, imagens (b) e (d).	100
Figura 62 – Remoção de ruídos na seção 48, utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c), aplicados individualmente às partições marm1, marm2, marm3 e marm4. Tais resultados referem-se aos gráficos 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35 e 36. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural, imagens (b) e (d).	101
Figura 63 – Remoção de ruídos na seção 50, utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c), aplicados individualmente às partições marim1, marim2, marim3 e marim4. Tais resultados referem-se aos gráficos 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39 e 40. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural, imagens (b) e (d).	102

Figura 64 – Remoção de ruídos na seção 52, utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c), aplicados individualmente às partições marim1, marim2, marim3 e marim4. Tais resultados referem-se aos gráficos 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39 e 40. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural, imagens (b) e (d).	103
Figura 65 – Remoção de ruídos na seção 54, utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c), aplicados individualmente às partições marim1, marim2, marim3 e marim4. Tais resultados referem-se aos gráficos 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39 e 40. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural, imagens (b) e (d).	104
Figura 66 – Variação do limiar de corte para a filtragem do Marmousi completo pela metodologia <i>ProbShrinkCurv</i>	105
Figura 67 – Variação do limiar de corte para a filtragem do Marimba completo pela metodologia <i>ProbShrinkCurv</i>	106
Figura 68 – Resultados da filtragem do marm1 pela metodologia <i>ProbShrinkCurv</i> , em função do limiar de corte.	106
Figura 69 – Resultados da filtragem do marm2 pela metodologia <i>ProbShrinkCurv</i> , em função do limiar de corte.	106
Figura 70 – Resultados da filtragem do marm3 pela metodologia <i>ProbShrinkCurv</i> , em função do limiar de corte.	107
Figura 71 – Resultados da filtragem do marm4 pela metodologia <i>ProbShrinkCurv</i> , em função do limiar de corte.	107
Figura 72 – Resultados da filtragem do marim1 pela metodologia <i>ProbShrinkCurv</i> , em função do limiar de corte.	107
Figura 73 – Resultados da filtragem do marim2 pela metodologia <i>ProbShrinkCurv</i> , em função do limiar de corte.	108
Figura 74 – Resultados da filtragem do marim3 pela metodologia <i>ProbShrinkCurv</i> , em função do limiar de corte.	108
Figura 75 – Resultados da filtragem do marim4 pela metodologia <i>ProbShrinkCurv</i> , em função do limiar de corte.	108
Figura 76 – Remoção de ruídos na seção 44 utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se ao gráfico 66.	109
Figura 77 – Remoção de ruídos na seção 46 utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se ao gráfico 66.	109
Figura 78 – Remoção de ruídos na seção 48 utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se ao gráfico 66.	110

Figura 79 – Remoção de ruídos na seção 50 utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se ao gráfico 67.	110
Figura 80 – Remoção de ruídos na seção 52 utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se ao gráfico 67.	111
Figura 81 – Remoção de ruídos na seção 54 utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se ao gráfico 67.	111
Figura 82 – Remoção de ruídos na seção 44 utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> (a), aplicado individualmente às partições marm1, marm2, marm3 e marm4, e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se aos gráficos 68, 69, 70 e 71.	112
Figura 83 – Remoção de ruídos na seção 46 utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> (a), aplicado individualmente às partições marm1, marm2, marm3 e marm4, e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se aos gráficos 68, 69, 70 e 71.	113
Figura 84 – Remoção de ruídos na seção 48 utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> (a), aplicado individualmente às partições marm1, marm2, marm3 e marm4, e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se aos gráficos 68, 69, 70 e 71.	113
Figura 85 – Remoção de ruídos na seção 50 utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> (a), aplicado individualmente às partições marim1, marim2, marim3 e marim4, e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se aos gráficos 72, 73, 74 e 75.	114
Figura 86 – Remoção de ruídos na seção 52 utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> (a), aplicado individualmente às partições marim1, marim2, marim3 e marim4, e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se aos gráficos 72, 73, 74 e 75.	114
Figura 87 – Remoção de ruídos na seção 54 utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> (a), aplicado individualmente às partições marim1, marim2, marim3 e marim4, e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se aos gráficos 72, 73, 74 e 75.	115
Figura 88 – Refinamento da seção 47a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).	116
Figura 89 – Refinamento da seção 61a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).	116

Figura 90 – Refinamento da seção 47c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).	117
Figura 91 – Refinamento da seção 61c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).	117
Figura 92 – Refinamento da seção 77a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).	118
Figura 93 – Refinamento da seção 83a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).	118
Figura 94 – Refinamento da seção 53a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).	119
Figura 95 – Refinamento da seção 64a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).	119
Figura 96 – Refinamento da seção 53c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).	120
Figura 97 – Refinamento da seção 64c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).	120
Figura 98 – Refinamento da seção 80a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).	121
Figura 99 – Refinamento da seção 86a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).	121
Figura 100 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens na seção Marmousi completa. Os traços 76 e 350 equivalem aos cdps 1625 e 1899, respectivamente.	123
Figura 101 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do Marmousi. Os traços 76 e 350 equivalem aos cdps 1625 e 1899, respectivamente.	123
Figura 102 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens na seção Marmousi completa. Os traços 76 e 350 equivalem aos cdps 1625 e 1899, respectivamente.	124

Figura 103 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do Marmousi. Os traços 76 e 350 equivalem aos cdps 1625 e 1899, respectivamente.	124
Figura 104 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens na seção Marimba completa. Os traços 156 e 450 equivalem aos cdps 360.6654 e 475.7339, respectivamente.	125
Figura 105 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do Marimba. Os traços 156 e 450 equivalem aos cdps 360.6654 e 475.7339, respectivamente.	125
Figura 106 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens na seção Marimba completa. Os traços 156 e 450 equivalem aos cdps 360.6654 e 475.7339, respectivamente.	126
Figura 107 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do Marimba. Os traços 156 e 450 equivalem aos cdps 360.6654 e 475.7339, respectivamente.	126
Figura 108 – Exemplo da seleção do nível de corte, para filtragem <i>ksigma</i> no Realland. (a) é a variação da PSNR com o corte. (b): tracejado claro - diferenças progressivas de (a) espelhado em relação ao eixo das ordenadas; tracejado escuro - diferenças progressivas de (a); linha sólida - soma das anteriores.	130
Figura 109 – Exemplo da seleção do nível de corte, para filtragem <i>AdaptSheinkCurv</i> no USGSland. Gráficos possuem a mesma representação da figura anterior 108.	131
Figura 110 – Exemplo da seleção do nível de corte, para filtragem <i>ProbShrinkCurv</i> no Realland. Gráficos possuem a mesma representação das figuras anteriores: 108 e 109.	131
Figura 111 – Parte superior esquerda da seção USGSmar na figura 12 Também são mostrados seus espectro de amplitude e F-K.	132
Figura 112 – Remoção de ruídos na seção Realland (10) utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c). Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).	134
Figura 113 – Remoção de ruídos na seção USGSland (11) utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c). Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).	135
Figura 114 – Remoção de ruídos na seção USGSmar (111) utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c). Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).	136

Figura 115 – Remoção de ruídos na seção Realland (10) utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c), aplicados individualmente às suas partições. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).	137
Figura 116 – Remoção de ruídos na seção USGSland (11) utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c), aplicados individualmente às suas partições. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).	138
Figura 117 – Remoção de ruídos na seção USGSmar (111) utilizando os métodos: <i>ksigma</i> (a) e <i>AdaptShrinkCurv</i> (c), aplicados individualmente às suas partições. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).	139
Figura 118 – Remoção de ruídos na seção Realland (10) utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b).	140
Figura 119 – Remoção de ruídos na seção Realland (10) utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> , aplicado individualmente às suas partições (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b).	141
Figura 120 – Remoção de ruídos na seção USGSland (11) utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b).	141
Figura 121 – Remoção de ruídos na seção USGSland (11) utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> , aplicado individualmente às suas partições (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b).	142
Figura 122 – Remoção de ruídos na seção USGSmar (111) utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b).	142
Figura 123 – Remoção de ruídos na seção USGSmar (111) utilizando o método <i>ProbShrinkCurv</i> , aplicado individualmente às suas partições (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b).	143
Figura 124 – Refinamento da seção 112a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).	144
Figura 125 – Refinamento da seção 115a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e suas respectiva versão original (branco).	145
Figura 126 – Refinamento da seção 112c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).	145
Figura 127 – Refinamento da seção 115c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e suas respectiva versão original (branco).	146

Figura 128 – Refinamento da seção 118a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).	146
Figura 129 – Refinamento da seção 119a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e suas respectiva versão original (branco).	147
Figura 130 – Refinamento da seção 113a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).	147
Figura 131 – Refinamento da seção 116a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e suas respectiva versão original (branco).	148
Figura 132 – Refinamento da seção 113c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).	148
Figura 133 – Refinamento da seção 116c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e suas respectiva versão original (branco).	149
Figura 134 – Refinamento da seção 120a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).	149
Figura 135 – Refinamento da seção 121a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e suas respectiva versão original (branco).	150
Figura 136 – Refinamento da seção 114a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).	150
Figura 137 – Refinamento da seção 117a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e suas respectiva versão original (branco).	151
Figura 138 – Refinamento da seção 114c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).	151
Figura 139 – Refinamento da seção 117c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e suas respectiva versão original (branco).	152
Figura 140 – Refinamento da seção 122a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).	152

Figura 141 – Refinamento da seção 123a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e suas respectiva versão original (branco).	153
Figura 142 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens na seção Realland completa. Os traços 175 e 300 equivalem aos cdps 1127 e 1218.3, respectivamente.	154
Figura 143 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do Realland. Os traços 175 e 300 equivalem aos cdps 1127 e 1218.3, respectivamente.	155
Figura 144 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens na seção Realland completa. Os traços 175 e 300 equivalem aos cdps 1127 e 1218.3, respectivamente.	155
Figura 145 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do Realland. Os traços 175 e 300 equivalem aos cdps 1127 e 1218.3, respectivamente.	156
Figura 146 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens na seção USGSland completa. Os traços 150 e 977 equivalem aos cdps 150 e 977, respectivamente.	156
Figura 147 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do USGSland. Os traços 150 e 977 equivalem aos cdps 150 e 977, respectivamente.	157
Figura 148 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens na seção USGSland completa. Os traços 150 e 977 equivalem aos cdps 150 e 977, respectivamente.	157
Figura 149 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do USGSland. Os traços 150 e 977 equivalem aos cdps 150 e 977, respectivamente.	158
Figura 150 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens na seção USGSmar completa. Os traços 350 e 750 equivalem aos cdps 450 e 850, respectivamente.	158
Figura 151 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do USGSmar. Os traços 350 e 750 equivalem aos cdps 450 e 850, respectivamente.	159
Figura 152 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens na seção USGSmar completa. Os traços 350 e 750 equivalem aos cdps 450 e 850, respectivamente.	159
Figura 153 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do USGSmar. Os traços 350 e 750 equivalem aos cdps 450 e 850, respectivamente.	160

Lista de tabelas

Tabela 1	– Análise das distribuições estatísticas marginais, para as sub-bandas curvelet das seções sísmicas aqui tratadas. Mostram-se os valores mínimo, máximo, médio e mediano, da curtose e do parâmetro de forma estimado, calculados para cada seção sísmica.	76
Tabela 2	– Valores PSNR das seções corrompidas por ruído. As linhas referem-se aos níveis de ruído σ_r e as colunas ao tipo: branco, passa-baixa e passa-alta (como discutido na seção 4.3).	80
Tabela 3	– Razão entre a energia do erro na impedância estimada e a energia total do modelo de referência. Os traços 76 e 350 são referentes ao Marmousi e os resultados da filtragem na seção completa corrompida por ruído $\sigma_r = 20$. O método de inversão foi o GLI.	127
Tabela 4	– Razão entre a energia do erro na impedância estimada e a energia total do modelo de referência. Os traços 76 e 350 são referentes ao Marmousi e os resultados da filtragem realizada, individualmente, no marm1, marm2, marm3 e marm4, corrompidos por ruído $\sigma_r = 20$. O método de inversão foi o GLI.	127
Tabela 5	– Razão entre a energia do erro na impedância estimada e a energia total do modelo de referência. Os traços 156 e 450 são referentes ao Marimba e os resultados da filtragem na seção completa corrompida por ruído $\sigma_r = 20$. O método de inversão foi o GLI.	127
Tabela 6	– Razão entre a energia do erro na impedância estimada e a energia total do modelo de referência. Os traços 156 e 450 são referentes ao Marimba e os resultados da filtragem realizada, individualmente, no marim1, marim2, marim3 e marim4, corrompidos por ruído $\sigma_r = 20$. O método de inversão foi o GLI.	128
Tabela 7	– Razão entre a energia do erro na impedância estimada e a energia total do modelo de referência. Os traços 76 e 350 são referentes ao Marmousi e os resultados da filtragem na seção completa corrompida por ruído $\sigma_r = 20$. O método de inversão foi o Bayes.	128
Tabela 8	– Razão entre a energia do erro na impedância estimada e a energia total do modelo de referência. Os traços 76 e 350 são referentes ao Marmousi e os resultados da filtragem realizada, individualmente, no marm1, marm2, marm3 e marm4, corrompidos por ruído $\sigma_r = 20$. O método de inversão foi o Bayes.	128

Tabela 9 – Razão entre a energia do erro na impedância estimada e a energia total do modelo de referência. Os traços 156 e 450 são referentes ao Marimba e os resultados da filtragem na seção completa corrompida por ruído $\sigma_r = 20$. O método de inversão foi o Bayes.	129
Tabela 10 – Razão entre a energia do erro na impedância estimada e a energia total do modelo de referência. Os traços 156 e 450 são referentes ao Marimba e os resultados da filtragem realizada, individualmente, no marim1, marim2, marim3 e marim4, corrompidos por ruído $\sigma_r = 20$. O método de inversão foi o Bayes.	129

Sumário

	Introdução	23
I	REFERENCIAL TEÓRICO E CONCEITUAL	26
1	A TRANSFORMADA CURVELET	27
1.1	Curvelets no contínuo	28
1.1.1	Representação espacial/temporal	32
1.2	Representação cartesiana	34
1.3	Transformada Curvelet via Wrapping	36
1.4	Sumário e conclusões	39
2	REMOÇÃO DE RUÍDOS	40
2.1	Truncamento abrupto	41
2.2	Truncamento suave — <i>ProbShrinkCurv</i>	42
2.2.1	Remoção adaptada à sub-banda	45
2.2.2	Remoção adaptada à sub-banda e ao contexto espacial local	46
2.2.3	Estimativa das constantes intrínsecas ao método	48
2.3	Estimando o nível de ruído do sinal	50
2.4	Sumário e conclusões	52
3	INVERSÃO ACÚSTICA PÓS-EMPILHAMENTO	54
3.1	Inversão sob regularização de esparsidade	54
3.2	Inversão linear generalizada (GLI)	55
3.3	Sumário e conclusões	56
II	EXPERIMENTOS, RESULTADOS E DISCUSSÃO	57
4	MODELOS, CONFIGURAÇÃO DOS EXPERIMENTOS E DISCUSSÕES PRELIMINARES	58
4.1	Dados sísmicos utilizados	58
4.2	Critérios para análise de performance	65
4.3	Parâmetros e configuração dos testes	70
4.4	Validação dos modelos marginais para coeficientes curvelet de dados sísmicos	73
4.5	Sumário de conclusões	78

5	APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	79
5.1	Experimentos com dados controlados	79
5.1.1	Abordagem 1	80
5.1.2	Abordagem 2 - ProbShrinkCurv	105
5.1.3	Refinamento dos resultados e Análise da Inversão do traço	115
5.2	Experimentos com dados reais	130
5.2.1	Abordagem 1	132
5.2.2	Abordagem 2 - PROBSHRINKCURV	140
5.2.3	Refinamento dos resultados e Análise da Inversão do traço	144
5.3	Sumário e conclusões	160
6	CONCLUSÕES	162
	REFERÊNCIAS	163
	APÊNDICES	172
	APÊNDICE A – COMPLEMENTO À SEÇÃO 2.2	173

Introdução

O objetivo da análise de dados sísmicos é a construção de um modelo de subsuperfície coerente com o sinal adquirido. Para tal, utilizam-se diversas metodologias de inversão. A precisão do modelo estimado é, em grande parte, função da qualidade do dado utilizado. Incertezas, por sua vez, implicam instabilidade no problema inverso e no caso sísmico, o ruído é inerente, aparecendo em diversas formas, na sua maioria correlacionáveis. Condicionar o dado, previamente à inversão, é então, imprescindível.

O maior problema quando da atenuação de ruídos, é restaurar as energias nas altas frequências, sem que a razão sinal-ruído seja degradada. Diversos trabalhos dedicam-se a esta questão. Como técnicas clássicas no processamento sísmico, a filtragem no domínio F-K, detalhada em [Wiggins \(1966\)](#), é possivelmente, a mais difundida quando da remoção de ruídos correlacionáveis (a exemplo das múltiplas). Citam-se, também, aquelas baseadas na transformada $\tau - p$ ([TATHAM; KEENEY; NOPONEN, 1983](#); [KAPPUS; HARDING; ORCUTT, 1990](#)), capazes de distinguir reflexões primárias de vários tipos de ruído, incluindo múltiplas, ruído aleatório e rolamento superficial; e as filtragens preditivas $T - X$ ([ABMA; CLAERBOUT, 1995](#)), para remoção de ruído lateralmente descorrelacionado.

Um grande número de trabalhos baseiam-se na teoria da transformada Wavelet. [Deighan e Watts \(1997\)](#) propõe sua utilização no tratamento do rolamento superficial e [Ioup e Ioup \(1998\)](#) estuda seu potencial para remoção de ruído branco. [Zhang e Ulrych \(2003\)](#), por sua vez, constrói e implementa um frame Wavelet baseado nas características do dado sísmico, capaz de remover ruídos tanto correlacionados como não. Mais recentemente [Meng, Li e Li \(2017\)](#) utiliza uma combinação entre *Block matching* e decomposição em valores singulares, no domínio da transformada Wavelet complexa *Dual-Tree*, para remoção de ruídos aleatórios.

Com a apresentação da transformada Curvelet (CT) por [Candès e Donoho \(1999a\)](#), um grande número de pesquisas dedicaram-se à sua aplicação na remoção de ruídos. Isto, principalmente, em função de fornecer uma representação esparsa quase-ótima para objetos com descontinuidades ao longo de curvas suaves. Para sinais sísmicos, a CT mostrou-se uma ferramenta eficiente a várias etapas do processamento ([MA; PLONKA, 2010](#)). Em [Hennenfent, Herrmann e Neelamani \(2005\)](#), o truncamento de coeficientes curvelet, é utilizado como técnica de regularização na deconvolução do traço sísmico. [Herrmann e Hennenfent \(2008\)](#) e [Hennenfent, Fenelon e Herrmann \(2010\)](#) estudam a aplicação da CT à regularização de dados sísmicos. Quanto à atenuação de múltiplas, citam-se os trabalhos [Herrmann, Wang e Verschuur \(2008\)](#), [Donno, Chauris e Noble \(2010\)](#) e [Yu e Yan \(2011\)](#). [Douma e Hoop \(2007\)](#) estuda a utilização da CT na migração e [Chauris e Nguyen \(2008\)](#)

para análise de velocidades.

Em específico à atenuação de ruídos no dado sísmico, [Neelamani et al. \(2008\)](#) revisa o truncamento abrupto no domínio Curvelet. [Górszczyk, Adamczyk e Malinowski \(2014\)](#) vai além e detalha o procedimento prático de truncamento curvelet orientado a cada subbanda, evidenciando sua efetividade. [Tang e Ma \(2011\)](#) discute o corte dos coeficientes, combinado com a técnica de minimização da variação total dos valores menores que um limiar estabelecido, a fim de selecionar os que possuem sinal. [Wang et al. \(2013\)](#) adapta o limiar de corte do *BayesShrink* ([CHANG; YU; VETTERLI, 2000a](#)) ao caso da CT. [Zhen-an, Cheng-yu e Jie \(2016\)](#) combina a filtragem curvelet com difusão anisotrópica. À parte os trabalhos citados, o tema em questão tem recebido bastante atenção atualmente e sua pesquisa é contínua, vê-se pelo número de trabalhos neste ano (2017), por exemplo: [Li et al. \(2017\)](#), [Nguyen e Liu \(2017\)](#) e [Ge et al. \(2017\)](#).

Neste trabalho, avalia-se a performance de três metodologias para atenuação de ruídos em dados sísmicos. A primeira consiste no truncamento abrupto dos coeficientes, como discutido em [Starck, Candès e Donoho \(2002\)](#). A segunda é uma adaptação dos conceitos por trás do *AdaptShrink* ([CHANG; YU; VETTERLI, 2000b](#)) à CT. A última consiste no método *ProbShrinkCurv*, introduzido em [Tessens et al. \(2008\)](#) para atenuação de ruído Gaussiano branco em imagens naturais. Destaca-se que, para as duas últimas, assume-se um *prior* Laplaciano para a distribuição dos coeficientes nas subbandas curvelet. Sendo assim, uma análise estatística intra-banda foi conduzida, buscando validar tal premissa.

Os testes envolveram tanto dados controlados, representativos de situações ideais, quanto reais. Após a filtragem, duas técnicas de inversão acústica do traço foram utilizadas como métrica quantitativa à performance dos métodos de atenuação. Busca-se avaliar a capacidade das metodologias em questão, na recuperação das amplitudes sísmicas, uma vez que, quanto melhor condicionado o dado, mais consistente será o modelo estimado.

Organizou-se o trabalho em duas partes. A primeira expõe a teoria e os conceitos necessários à compreensão do trabalho. Esta é composta por três capítulos: O primeiro discute a teoria por trás da transformada Curvelet, discutem-se tanto a formulação contínua quanto a discreta (e conseqüentemente, a implementação numérica). No segundo, o tema atenuação de ruídos é abordado, assim discutem-se os conceitos por trás das metodologias em questão. Por sua vez, o terceiro trata as técnicas de inversão acústicas pós-empilhamento (do traço), apresentando de forma breve, a teoria destas.

Em relação à segunda parte, apresentam-se os resultados dos testes e análises realizados, assim como conclusões do trabalho. Esta é composta por dois capítulos. O primeiro trata a configuração dos experimentos, detalhando sobre a organização dos testes e, por fim, realizando a análise estatística intra-banda no domínio curvelet, supracitada. O último apresenta os resultados. Por fim, apresentam-se as conclusões do trabalho no

capítulo 6.

Parte I

Referencial teórico e conceitual

1 A Transformada Curvelet

A Transformada Curvelet (CT), apresentada inicialmente em [Candès e Donoho \(1999a\)](#), é uma generalização da Wavelet ([MALLAT, 1999](#)), para duas ou mais dimensões. Na busca de uma versão digital, a primeira geração de algoritmos da CT surgiu. [Donoho e Duncan \(2000\)](#), emprega filtragem passa-banda seguida da análise com a Transformada Ridglet ([CANDÈS; DONOHO, 1999b](#)) em cada imagem de banda limitada. [Starck, Candès e Donoho \(2002\)](#), por sua vez, aborda a discretização da Curvelet com fluxo similar. No entanto, nesta metodologia, a filtragem passa-banda utiliza um banco de filtros Wavelet *à trous*¹ e a Transformada Ridglet é digitalizada com base na Radon discreta. Tal digitalização da Ridglet, diverge da formulação contínua, de forma que foi desenvolvida buscando resultados ótimos quanto à atenuação de ruídos. Por fim, é válido citar o trabalho [Do e Vetterli \(2001\)](#), o qual propõe a discretização, utilizando decomposição multiescala pela pirâmide Laplaciana, seguida de filtragem por banco de filtros direcional.

Surgindo da necessidade de uma transformada computacionalmente mais eficiente (mais rápida e menos redundante), e de fácil compreensão, a segunda geração de curvelets, assim referindo-se aos frames compactos que não utilizam ridgelets, foi apresentada em [Candès e Donoho \(2003b\)](#). Dois algoritmos para sua discretização foram propostos em [Candès et al. \(2005\)](#): USFFT, utilizando Transformadas Rápidas de Fourier (FFT) espaçadas de forma irregular e Wrapping, utilizando um envoltório de amostras em torno da origem, selecionadas após periodização no domínio da frequência. Neste trabalho, a última versão foi adotada por três motivos: ser de mais fácil compreensão, em prática ser mais rápida e produzir reconstruções mais precisas. O último sendo consequência da Wrapping ser um frame compacto, em contraste com a USFFT que não é. Ressalta-se, no entanto, que dentro do propósito deste trabalho, a utilização da USFFT levaria a resultados similares.

Nas subseções seguintes os principais conceitos por trás da CT (segunda geração) são expostos de forma breve. Primeiramente trata-se da formulação contínua, em seguida os principais conceitos por trás da discretização serão apresentados e, por último, o algoritmo Wrapping é discutido.

¹ Este termo remete ao termo em francês *algorithme à trous*, cuja tradução direta é “algoritmo de buracos”, e refere-se à Transformada Wavelet Estacionária, cuja implementação não envolve decimação. A não decimação acontece através da introdução de zeros após cada filtragem (por este motivo o nome), o que garante que as imagens de cada sub-banda possuam o mesmo tamanho.

1.1 Curvelets no contínuo

A apresentação da teoria por trás da CT, abaixo, é baseada nos primeiros trabalhos (CANDÈS; GUO, 2002; CANDÈS; DONOHO, 2003b) e na revisão sobre a CT e suas aplicações feita em Ma e Plonka (2010). Candès e Donoho tem como inspiração para a formulação seguinte, a melhoria da CT baseada na Ridgelet (primeira geração). Eles partem da teoria das wavelets² para construir um frame apertado, a partir de deslocamentos, dilatações e rotações da curvelet base, que garanta uma representação esparsa ótima, de objetos com descontinuidades ao longo de contornos (*edges*) C^2 . É importante ressaltar, no entanto, que a construção de um frame equivalente foi apresentada, anteriormente, em Smith (1998).

Inicialmente, definamos a família de janelas ortogonais e com suporte compacto $\chi_{j,l}$, respeitando:

$$|\chi_0|^2 + \sum_{j \geq 1, l} |\chi_{j,l}|^2 = 1; \quad (1.1)$$

considerando $j \in \mathbb{N}_0$ e $l = 0, 1, 2, \dots, 2^{\lfloor j/2 \rfloor} - 1$, para $\lfloor j/2 \rfloor$ a parte inteira de $j/2$, tanto em 1.1 quanto ao longo de toda discussão. Estas são construídas de forma a localizar seu espectro de amplitude ao longo de cunhas circulares (*circular wedges*) com comprimento $\sim 2^j$ e espessura $\sim 2^{j/2}$, permitindo uma partição do plano de frequências de forma similar à representação na figura 1.

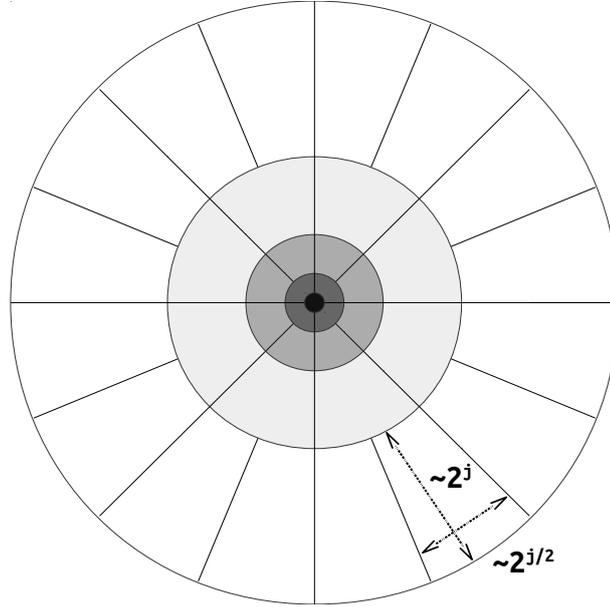
Esta forma de decompor o espectro foi introduzida por Fefferman (1973) e pode ser interpretada como uma decomposição Littlewood-Paley³ refinada, como colocado em Stein e Murphy (1993), onde é utilizada no estudo das propriedades de uma classe de integrais oscilatórias, intituladas Operadores Integrais de Fourier (*Fourier Integral Operators*).

Admitindo coordenadas polares no domínio $\omega = (\omega_1, \omega_2)^T$, definir uma segmentação em cunhas cujo tamanho varia com a escala j e a orientação angular (índice l), envolve a utilização de duas janelas, uma radial: $\psi(|\omega|)$; e uma angular: $\varphi(\theta)$. Para estas, exige-se

² Wavelets, dentro do escopo deste capítulo, referem-se às funções base na construção da Transformada Wavelet. Desta forma não devem ser confundidas com wavelets sísmicas, termo relativo à forma do sinal sísmico como estimado no tratamento dos dados.

³ Colocando de forma simples, a decomposição Littlewood-Paley consiste em uma divisão diádica em anéis (ou cascas esféricas) do domínio de Fourier. Ou seja, para $\omega \in \mathbb{R}^n$ a variável associada ao espaço de frequências, a seguinte subdivisão é característica: $2^{j-1} \leq |\omega| \leq 2^{j+1}$, com $j \in \mathbb{N}_0$. Essa está ligada às áreas de análise harmônica e funcional, sendo um conceito fundamental na teoria Littlewood-Paley (LITTLEWOOD; PALEY, 1931; LITTLEWOOD; PALEY, 1937; LITTLEWOOD; PALEY, 1938). Devido ao fato de fugir do escopo deste trabalho, uma discussão pormenorizada desta teoria, e consequentemente da decomposição, não será feita; indica-se, no entanto, o trabalho Frazier, Jawerth e Weiss (1991).

Figura 1 – Representação esquemática da segmentação do plano de frequências associada à transformada Curvelet. Cada janela em cunha equivale a uma função curvelet no espaço.



Fonte: O autor.

suporte compacto e que as propriedades de admissibilidade sejam satisfeitas:

$$|\psi_0(|\omega|)|^2 + \sum_j |\psi(2^{-j}|\omega|)|^2 = 1, \quad \omega \in \mathbb{R}; \quad (1.2a)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l=0}^{2^{\lfloor j/2 \rfloor + 1} - 1} |\varphi(2^{\lfloor j/2 \rfloor} \theta - \pi l + 2\pi k)|^2 = 1 \quad \forall j. \quad (1.2b)$$

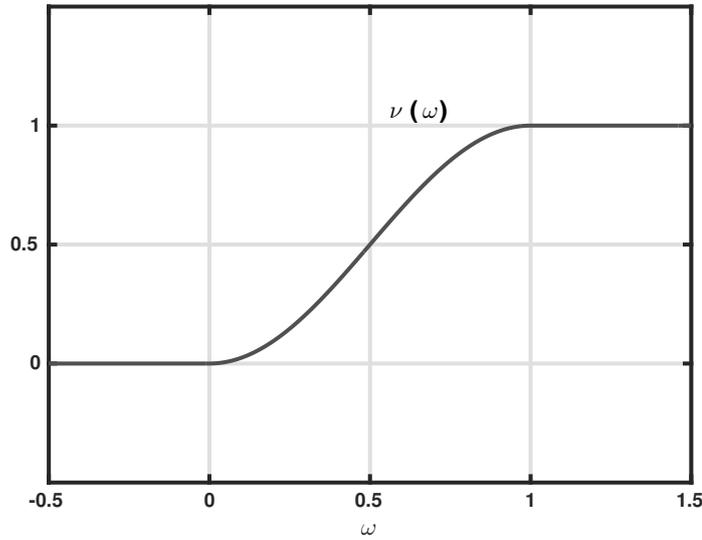
Em [Lemarié e Meyer \(1986\)](#) e [Meyer e Ryan \(1993\)](#), a construção de uma base ortonormal⁴ de funções wavelet, as wavelets de Meyer, é apresentada. Partindo da estruturação proposta, é possível definir as janelas $\phi_{Meyer}(\omega)$ e $\psi_{Meyer}(\omega)$, descritas matematicamente por:

$$\phi_{Meyer}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 2\pi/3 \\ \cos[\frac{\pi}{2}\nu(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1)] & 2\pi/3 \leq |\omega| \leq 4\pi/3 \\ 0 & \text{demais casos} \end{cases}; \quad (1.3a)$$

$$\psi_{Meyer}(\omega) = \begin{cases} e^{j\omega/2} \sin[\frac{\pi}{2}\nu(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1)] & 2\pi/3 \leq |\omega| \leq 4\pi/3 \\ e^{j\omega/2} \cos[\frac{\pi}{2}\nu(\frac{3}{4\pi}|\omega| - 1)] & 4\pi/3 \leq |\omega| \leq 8\pi/3 \\ 0 & \text{demais casos} \end{cases}; \quad (1.3b)$$

⁴ Definições conceituais sobre bases ortogonais e frames, assim como ortogonalidade e ortonormalidade de espaços funcionais, podem ser encontradas, por exemplo, nos trabalhos [Daubechies \(1992\)](#), [Mallat \(1999\)](#) e [Burrus, Gopinath e Guo \(1998, cap. 4\)](#).

Figura 2 – Exemplo de função C^∞ satisfazendo as condições 1.5.



Fonte: O autor.

para particionar a unidade segundo:

$$|\phi_{Meyer}(\omega)|^2 + \sum_j |\psi_{Meyer}(2^{-j}\omega)|^2 = 1, \quad \omega \geq 0. \quad (1.4)$$

Em 1.3, ν é uma função suave (C^k ou C^∞) que obedece:

$$\nu(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \leq 0 \\ 1 & \omega \geq 1 \end{cases}; \quad (1.5a)$$

$$\nu(\omega) + \nu(1 - \omega) = 1. \quad (1.5b)$$

A figura 2 mostra um exemplo de função que satisfaz estas condições.

Observando que as funções de Meyer apresentadas possuem suporte compacto e que, no máximo dois termos (funções) na soma 1.4 se sobrepõem, uma partição espectral em bandas aproximadamente distintas, é possível. Desta forma, definir $\psi(|\omega|)$ e $\varphi(\theta)$ a partir de 1.3, satisfará tanto a condição de suporte compacto quanto 1.2a e 1.2b, contanto que $\text{supp}\{\varphi\} \subset [-\pi, \pi]$. O produto das duas, por sua vez, obedecerá 1.1, ou seja, comporá uma base ortogonal em \mathbb{R}^2 .

A partir das definições acima e utilizando 1.3a, determina-se a janela angular $\varphi(\theta) = \phi_{Meyer}(2\theta)$, par, C^∞ , com suporte $[-2\pi/3, 2\pi/3]$ e, cuja extensão 2π -periódica, obedece:

$$|\varphi^2(\theta)|^2 + |\varphi^2(\theta - \pi)|^2 = 1, \quad \theta \in [0, 2\pi). \quad (1.6)$$

Quanto à janela radial, esta utilizará tanto 1.3a quanto 1.3b sob configuração:

$$|\psi(\omega)|^2 = |\psi_{Meyer}(\omega)|^2, \quad \psi_0(\omega) = \phi_{Meyer}(\omega); \quad (1.7)$$

com suporte $[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}]$, e obedecendo 1.2a.

Tomando a representação $\varphi_{j,l}(\theta) = \varphi(2^{\lfloor j/2 \rfloor} \theta - \frac{\pi l}{2^{\lfloor j/2 \rfloor}})$, definindo a janela de menor resolução (ou passa-baixa) como: $|\chi_0(\omega)|^2 = |\psi_0(\omega)|^2$; e observando que, ao considerar $j \geq 1$, os suportes das janelas $\varphi_{j,l}(\theta)$ e $\varphi_{j,l}(\theta + \pi)$ não possuem elemento em comum ($\text{supp}\{\varphi_{j,l}(\theta)\} \cap \text{supp}\{\varphi_{j,l}(\theta + \pi)\} = \emptyset$), obtêm-se as janelas simétricas:

$$\chi_{j,l}(\omega) = \psi(2^{-j}|\omega|)[\varphi_{\lfloor j/2 \rfloor, l}(\theta) + \varphi_{\lfloor j/2 \rfloor, l}(\theta + \pi)], \quad (1.8)$$

ortogonais e com suporte compacto, obedecendo 1.1. Em consequência desta definição, compreende-se que, para $l > 0$, em cada escala 2^{-j} as demais janelas podem ser obtidas a partir da rotação das janelas $\chi_{j,0}$.

Considerando as janelas acima (1.8), os suportes das $\chi_{j,0}$ são os retângulos $\Xi_j = L_{1j} \times L_{2j}$, simétricos à origem, tal que:

$$L_{1j} = \{\omega_1, m_j \leq |\omega_1| \leq m_j + X_j\} \quad \text{e} \quad L_{2j} = \{\omega_2, |\omega_2| \leq \frac{Y_j}{2}\}; \quad (1.9)$$

onde $X_j = \pi 2^j \ell_1$ e $Y_j = 2\pi 2^{j-\lfloor j/2 \rfloor} \ell_2$, com constantes $\ell_1 = 2(1 + \mathcal{O}(2^{-j}))$ e $\ell_2 = \frac{8\pi}{9}$, que por sua vez são definidas a partir do suporte das janelas utilizadas.

Observando que as funções:

$$\frac{\exp(\frac{2\pi j(k+a)\omega}{M})}{\sqrt{M}} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad a \text{ e } M \in \mathbb{R}; \quad (1.10)$$

além de um conjunto ortonormal, constituem uma base ortonormal de $L^2([\omega_1, \omega_1 + M])$ ⁵, é possível definir bases ortonormais para $L^2([L_{1j}])$ e $L^2([L_{2j}])$, respectivamente, como:

$$\frac{\exp(\frac{\pi j(k_1)\omega_1}{X_j})}{\sqrt{2X_j}} \quad k_1 \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{\exp(\frac{2\pi j(k_2)\omega_2}{Y_j})}{\sqrt{Y_j}} \quad k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Consequentemente, para $L^2([\Xi_j])$ tem-se:

$$U_{j,k}(\omega) = \frac{2^{-j+\lfloor j/4 \rfloor}}{2\pi\sqrt{\ell_1\ell_2}} \exp(jk_1 \frac{\omega_1}{\ell_1} 2^{-j}) \exp(jk_2 \frac{\omega_2}{\ell_2} 2^{-j+\lfloor j/2 \rfloor}), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, \quad (1.11)$$

com $k = (k_1, k_2)$ o índice de translação espacial.

Para a região contendo a janela de menor resolução χ_0 , limitada pelo quadrado Ξ_0 com lateral $2\pi\ell_0$; partindo de 1.10, define-se a base ortonormal para $L^2(\Xi_0)$:

$$U_{0k}(\omega) = \frac{\exp[j(\frac{k_1\omega_1+k_2\omega_2}{\ell_0})]}{2\pi\ell_0}.$$

⁵ Para provas matemáticas, além de uma discussão completa sobre análise funcional e de Fourier (áreas introdutórias à diversos conceitos aqui citados), uma vez que estes fogem do escopo deste trabalho, indicam-se as notas de aula dos cursos Melrose (2009) e Jerison (2013) como um bom ponto de partida para uma compreensão mais aprofundada.

Além disto, a fim de satisfazer a construção aqui apresentada ($\text{supp}\{\psi_0(\omega)\}$), estipula-se $\ell_0 = \frac{8}{3}$.

Utilizando a matriz de rotação $R(\alpha_{j,l})$, o ângulo $\alpha = \pi l 2^{-j}$ e o símbolo $*$ referindo-se à conjugada transposta, a representação matemática de funções curvelet na frequência, incluindo as associadas à χ_0 , é:

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}_{j,l,k}(\omega) &= 2\pi \cdot \chi_{j,l}(\omega) \cdot U_{j,k}(R^*(\alpha_{j,l})\omega), \quad j \geq 1 \quad \text{e} \\ \hat{\zeta}_{0,0,k}(\omega) &= 2\pi \cdot \chi_0(\omega) \cdot U_{0k}(\omega).\end{aligned}\tag{1.12}$$

Por fim, recordando que $U_{j,k}$ e U_{0k} formam bases ortonormais para o suporte das janelas $\chi_{j,l}$ e χ_0 e utilizando 1.1, para a representação no domínio de Fourier, $F(\omega)$ de qualquer função $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, é verdadeiro que:

$$\sum_{j,l,k} |\langle F(\omega) \hat{\zeta}_{j,l,k}(\omega) \rangle|^2 = 4\pi^2 \cdot \|F(\omega)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.\tag{1.13}$$

Segue da igualdade acima que $\hat{\zeta}_{j,l,k}$ compõe um frame apertado de $L^2(\mathbb{R}^2)$ e pelo teorema de Plancherel a relação de Parseval é válida assim como a fórmula de reconstrução:

$$f(x) = \sum_{j,l,k} \langle f(x), \zeta_{j,l,k}(x) \rangle \zeta_{j,l,k}(x);\tag{1.14}$$

ou seja, para qualquer função $L^2(\mathbb{R}^2)$, é possível analisá-la e sintetizá-la como uma superposição de curvelets. Para uma discussão mais completa sobre propriedades das curvelets refere-se [Candès e Donoho \(2003a\)](#).

1.1.1 Representação espacial/temporal

A estrutura espacial de uma curvelet está diretamente relacionada ao fato desta ser ótima para análise de objetos C^2 , com singularidades ao longo de curvas também C^2 . Esta subseção discutirá a estrutura de curvelets sem, no entanto, discutir sobre tal optimalidade. A fim de uma discussão sobre, indica-se [Candès e Donoho \(2003b\)](#) onde tanto uma argumentação heurística quanto matemática são apresentadas.

Inicialmente define-se a função $\varsigma^{(j)}$ no espaço, tal que:

$$\varsigma^{(j)}(x) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2^{-j+\lfloor j/4 \rfloor}}{\sqrt{\ell_1 \ell_2}} \chi_{j,0}(\omega) \right\},\tag{1.15}$$

sendo \mathcal{F}^{-1} o operador inverso de Fourier. Consequentemente, de 1.11, segue que:

$$\zeta_{j,0,k}(\omega) = \varsigma^{(j)}(x - \kappa),\tag{1.16}$$

ao considerar $\kappa = (k_1 \frac{2^{-j}}{\ell_1}, k_2 \frac{2^{-j+\lfloor j/2 \rfloor}}{\ell_2})$. Relembrando a observação sobre 1.8, $\chi_{j,l}(\omega) = \chi_{j,0}(R^*(\alpha_{j,l})\omega)$; e utilizando a propriedade de rotação da transformada de Fourier $2D$, é possível definir as curvelets, no espaço, como:

$$\zeta_{j,l,k}(x) = \varsigma^{(j)}(R^*(\alpha_{j,l})x - \kappa).\tag{1.17}$$

Na relação 1.17, acima, observa-se que a malha espacial utilizada é função da escala 2^{-j} . Desta forma, uma discretização necessitaria de n malhas, para n igual ao número de escalas utilizado mais um, o que não é uma forma ideal de representação. A fim de contornar este problema, define-se:

$$\varsigma^{(j)}(x) = \varsigma_j(D_j(x)), \quad (1.18)$$

em que D_j é a matriz diagonal $(2^j \ 2^{j-\lfloor j/2 \rfloor})^T \times I_{2 \times 2}$, com T representando transposição e I a matriz identidade. É possível, então, reescrever 1.17 como:

$$\zeta_{j,l,k}(x) = \varsigma_j[D_j(R^*(\alpha_{j,l})x - \kappa)] \xleftrightarrow{k_\ell = D_j \kappa} \zeta_{j,l,k}(x) = \varsigma_j(D_j R^*(\alpha_{j,l})x - k_\ell). \quad (1.19)$$

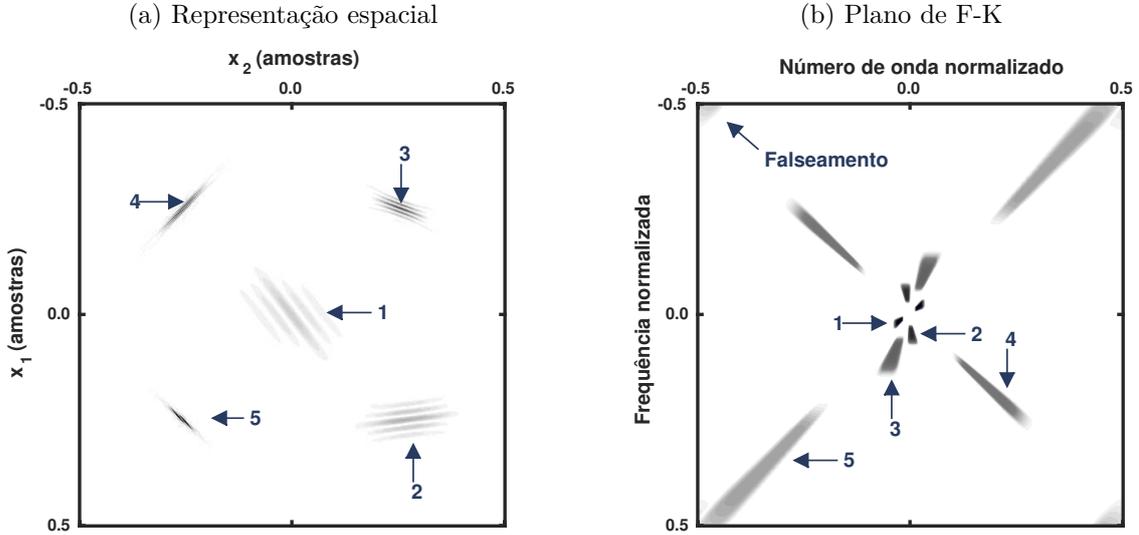
Analisando o suporte das janelas $\chi_{j,0}$, eles são definidos como distanciando-se de $|\omega_1| = 0$ e limitando-se cada vez mais à vizinhança $|\omega_2| = 0$, em função de j . Sendo assim, no espaço, 1.15 definirá funções com comportamento oscilatório ao longo da direção x_1 e formato de gaussiana a um trapezóide com bordas suaves, na direção x_2 . Além disso, como o suporte destas janelas, na frequência, é compacto, no espaço ele será infinito, ainda que seu suporte essencial (MA; PLONKA, 2010), ou efetivo (CANDÈS; DONOHO, 2003b), esteja limitado a uma região com comprimento $\sim 2^{-j+\lfloor j/2 \rfloor}$ e largura $\sim 2^{-j}$. Referindo-se a suporte efetivo, como a região contendo a maior parte da energia da função, de forma que seu decaimento fora destes limites será tão rápido, quanto mais suave for seu espectro de amplitude.

Por fim, é possível descrever as curvelets, espacialmente, como funções com formato elíptico nas menores escalas e de agulha conforme o aumento de j , respeitando a seguinte relação parabólica/anisotrópica:

$$\text{largura} \approx \text{comprimento}^2.$$

A figura 3 ilustra as propriedades acima discutidas, mostrando a representação espacial e em frequência de 5 curvelets em diferentes escalas e orientações. A numeração remete à escala da curvelet e, devido à propriedade de simetria, somente a parte real foi indicada. Também é chamada atenção para o falseamento no domínio de Fourier, brevemente discutido na seção 1.3.

Figura 3 – Representação espacial (a) e em frequência (b) de 5 curvelets. A numeração aumenta com a escala a que se refere. Em (b) também é destacado o efeito de falseamento, inerente às curvelets da escala de maior detalhe.



Fonte: O autor.

1.2 Representação cartesiana

Como representado pela equação 1.19, as curvelets são definidas como dilatações, rotações e translações no espaço $x \in \mathbb{R}^2$, de elementos alongados com forma análoga a agulhas. Esta seção tratará da discretização do conceito de curvelets como premissa para introdução da implementação digital na próxima seção.

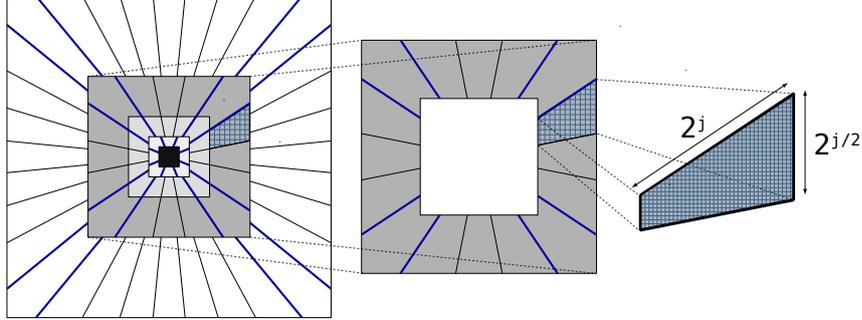
Tendo como objetivo uma implementação computacional, a utilização de coordenadas cartesianas é o mais comum. Exige-se então, uma adaptação dos conceitos anteriormente apresentados. No que diz respeito à partição do espectro, empregam-se quadrados concêntricos e trapezoides (com exceção aos cantos dos quadrados), como ilustrado na figura 4. Constitui uma abordagem eficiente, dado o propósito de segmentar o plano de frequências, como demonstrado pelo trabalhos: Do e Vetterli (2001) com curvelets e Welland (2003) com contourlets.

Para a subdivisão do domínio de frequências pretendida, as funções curvelet, como definidas em 1.12 e, conseqüentemente, as famílias $\chi_{j,l}$ e $U_{j,k}$, necessitam ser propriamente adequadas. Tratando simultaneamente dos quadrantes leste e oeste ($-1 \leq \omega_2/\omega_1 \leq 1$), ao invés de uma janela angular, utiliza-se uma cisalhante $\check{\varphi}(\omega_2/\omega_1) = \phi_{Meyer}(2\pi\omega_2/\omega_1)$, responsável por definir regiões limitadas por trapezoides cisalhados e obedecendo:

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\check{\varphi}(2^{\lfloor j/2 \rfloor} \omega_2/\omega_1 - l)|^2 = 1, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0; \quad (1.20)$$

condição equivalente à 1.2b.

Figura 4 – Partição do domínio de Fourier associada à curvelets digitais. O espectro é seccionado em trapezóides, exceto nas regiões limitadas pelas linhas em azul, os cantos. O quadrado preto, central, representa a banda de menores frequências e a região hachurada, detalha um dos trapezóides.



Fonte: O autor.

Quanto à janela radial, ao considerar somente os quadrantes leste e oeste, simétricos ao eixo ω_2 , é possível adotar funções $1D$ sob a mesma construção anterior (1.7), tal que:

$$|\check{\psi}(\omega_1)|^2 = |\psi_{Meyer}(\omega_1)|^2, \quad \check{\psi}_0(\omega_1) = \phi_{Meyer}(\omega_1). \quad (1.21)$$

Da mesma forma, ao tratar os quadrantes norte e sul, $\check{\psi}$ será função de ω_2 .

Comparando 1.2b e 1.20, acima, observa-se que as janelas são igualmente espaçadas em função da variação angular $\tan(\theta)$, não em função do ângulo θ , como na formulação contínua. A partir desta observação, é possível definir o conjunto de variações angulares $\tan(\theta_{j,l}) = l2^{-[j/2]}$, para l um número inteiro contido em $[-2^{[j/2]} + 1, 2^{[j/2]} - 1]$, e, utilizando a matriz de cisalhamento:

$$S(\alpha_{j,l}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\tan(\alpha_{j,l}) & 1 \end{bmatrix}; \quad (1.22)$$

reescrever a janela cisalhante, em função de j e l , como: $\check{\varphi}(S^{-1}(\theta_{j,l})\omega) \Leftrightarrow \check{\varphi}(2^{[j/2]}\omega_2/\omega_1 + l)$.

A partir de $\check{\psi}$ e $\check{\varphi}$ discutidas, obtêm-se as janelas ortogonais e com suporte compacto $\check{\chi}_{j,l}$, análogas às 1.8 definidas por:

$$\chi_{j,l}(\omega) = \check{\psi}(2^{-j}|\omega_1|)\check{\varphi}(S^{-1}(\theta_{j,l})\omega), \quad (1.23)$$

para $j \geq 0$ e como: $\chi_0(\omega) = \psi_0(\omega_1)\psi_0(\omega_2)$, para a menor banda de resolução ($j = 0$). Consequentemente:

$$|\check{\chi}_0|^2 + \sum_{j \geq 1, l} |\check{\chi}_{j,l}|^2 = 1. \quad (1.24)$$

Sob a premissa de que os suportes das funções $\check{\chi}_{j,0}$ estão contidos nos retângulos $\check{\Xi}_j$, uma base ortonormal $\check{U}_{j,k}$, para $L^2(\check{\Xi}_j)$, pode ser definida quase identicamente à 1.11, exceto pela constante ℓ_1 , agora definida como 2. Além disso, pela definição de $\check{\chi}_0$, o

retângulo contendo seu suporte $\check{\Xi}_0$ é o mesmo que Ξ_0 . Por equivalência, tem-se a base ortonormal $\check{U}_{0k} = U_{0k}$ para $L^2(\check{\Xi}_0)$.

Seguindo 1.12, é possível, então, definir as funções curvelet para os quadrantes leste e oeste, ao admitir uma partição em quadrados concêntricos e trapezoides, como:

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}_{j,l,k}(\omega) &= 2\pi \cdot \check{\chi}_{j,l}(\omega) \cdot \check{U}_{j,k}(S^{-1}(\theta_{j,l})\omega), \quad j \geq 1 \quad \text{e} \\ \hat{\zeta}_{0,0,k}(\omega) &= 2\pi \cdot \check{\chi}_0(\omega) \cdot \check{U}_{0k}(\omega).\end{aligned}\tag{1.25}$$

Discute-se, por fim, que com objetivo de garantir a propriedade de frame apertado, as curvelets associadas aos quadrantes norte e sul também devem ser consideradas. Nas equações acima, elas podem ser encontradas ao substituir ω_1 por ω_2 , ou equivalentemente, através de uma rotação por $\pi/2$. E, pelo mesmo motivo, as janelas dos “cantos” devem ser definidas. Partindo da solução proposta em Candès et al. (2005), uma forma é utilizar a soma das extensões de 1.25 para $l = -2^{\lfloor j/2 \rfloor}, 2^{\lfloor j/2 \rfloor}$, considerando a restrição das curvelets serem definidas somente dentro da região delimitada por seus respectivos quadrantes, ou seja: $-1 \leq \tan(\theta) \leq 1$.

1.3 Transformada Curvelet via Wrapping

Introduzida uma representação cartesiana, é necessário desenvolver uma adaptação computacionalmente eficiente. Em Candès et al. (2005), como já comentado, duas implementações numéricas são propostas. A utilizada neste trabalho foi a Wrapping, de forma que esta seção dedica-se a uma breve discussão da mesma.

Considerando uma função $f \in \mathbb{R}^2$, pela propriedade de frame apertado, o produto interno desta e as curvelets produzirá o conjunto de coeficientes $\mathbf{c}_{j,l,k}$, descrevendo f no domínio da transformada Curvelet. Pelo teorema de Plancherel é possível escrever essa transformação (o produto interno) em ω , como:

$$\mathbf{c}_{j,l,k} = \int_{\mathbb{R}^2} F(\omega) \hat{\zeta}_{j,l,k}(\omega) d\omega.\tag{1.26}$$

A equação 1.26 é facilmente adaptada para curvelets cartesianas ao substituir $\hat{\zeta}_{j,l,k}$ por $\check{\zeta}_{j,l,k}$. Utilizando a forma explícita da base ortonormal $\check{U}_{j,k}$ e, como em 1.16, fazendo $\kappa = (k_1 \frac{2^{-j}}{\ell_1}, k_2 \frac{2^{-j+\lfloor j/2 \rfloor}}{\ell_2})^T$, os coeficientes são obtidos por:

$$\mathbf{c}_{j,l,k} = \frac{2^{-j+\lfloor j/4 \rfloor}}{\sqrt{\ell_1 \ell_2}} \int_{\mathbb{R}^2} F(\omega) \check{\chi}_{j,l}(\omega) e^{j(S^{-1}(\theta_{j,l})\kappa, \omega)} d\omega,\tag{1.27}$$

onde, pela definição de $\check{\chi}_{j,l}(\omega)$ 1.23, a operação de cisalhamento está implícita. Vale ressaltar que, em decorrência de como κ foi definida, 1.27 é válida somente para os quadrantes leste e oeste. Para os outros dois quadrantes, rotação por $\pi/2$ deve ser aplicada às variáveis k e ω , e, conseqüentemente ℓ_1 e ℓ_2 devem ser invertidos.

Implementar numericamente implica aplicar os conceitos a funções de variáveis discretas. Adotando indexação por colchetes como representante de funções digitais e tomando $n_1, n_2 \in [0, n]$, para n o valor máximo contido no domínio da função discreta $f \in \mathbb{R}^2$, é possível definir os coeficientes curvelet digitais por:

$$\tilde{\mathfrak{c}}_{j,l,k} = \frac{2^{-j+|j/4|}}{\sqrt{\ell_1 \ell_2}} \sum_{0 \leq (n_1, n_2) \leq n} F[n_1, n_2] \cdot \check{\chi}_{j,l}[n_1, n_2] e^{j(S^{-1}(\theta_{j,l})\kappa, (n_1, n_2)^T)}. \quad (1.28)$$

Em prática, implementar 1.28 necessita o cálculo da transformada inversa de Fourier em uma malha cisalhada. Tal processo é inviável pela transformada rápida de Fourier (FFT)⁶ que utiliza uma malha retangular padrão.

Relembrando que o suporte das funções $\check{\chi}_{j,0}$ está contido no retângulo Ξ_j , para $l \neq 0$ os suportes estarão contidos em $\Xi_{j,l} = S^{-1}(\theta_{j,l})\Xi_j$, retângulos cisalhados. Os últimos por sua vez, sob a premissa de uma malha retangular, estarão contidos em retângulos $\mathcal{R}_{j,l}$, com dimensões $\sim 2^j \times \sim 2^j$, muito superiores a $\Xi_{j,l}$. Por sua vez, os coeficientes $\tilde{\mathfrak{c}}_{j,l,k}$ poderiam ser calculados admitindo malhas retangulares com tamanhos de célula igual a $\mathcal{R}_{j,l}$. No entanto, como discutido em Candès et al. (2005), este procedimento resultaria em super-amostragem dos coeficientes e, conseqüentemente, em um custo computacional significativamente superior. Além disso, a discretização de $\check{\chi}_{j,l}(\omega)$ resultaria em uma soma em (n_1, n_2) que se estenderia além dos limites permitidos pela FFT.

O algoritmo numérico Wrapping contorna este problema de uma maneira eficiente ao periodizar as janelas $\check{\chi}_{j,l}(\omega)$, criando uma segmentação do domínio de Fourier em regiões com a mesma dimensão que estas.

Tomando a definição 1.9, tal que $\Xi_j = L_{1j} \times L_{2j}$, a periodização envolvida na implementação Wrapping supõe que para cada orientação $\theta_{j,l}$, o plano de frequências é particionado em regiões definidas pela translação horizontal de $\Xi_{j,l}$, por múltiplos de L_{1j} , e vertical por múltiplos de L_{2j} . Considerando a decomposição de $F(\omega)$ pelo produto $\mathfrak{C}[n_1, n_2] = F[n_1, n_2] \check{\chi}_{j,l,k}[n_1, n_2]$, tal periodização pode ser matematicamente expressa por:

$$\mathcal{W}\{\mathfrak{C}[n_1, n_2]\} = \sum_{t_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{t_2 \in \mathbb{Z}} \mathfrak{C}[n_1 + t_1 L_{1j}, n_2 + t_2 L_{2j}]. \quad (1.29)$$

As amostras de $\mathcal{W}\{\mathfrak{C}[n_1, n_2]\}$ utilizadas no cálculo de $\tilde{\mathfrak{c}}_{j,l,k}$ serão aquelas obedecendo às restrições $0 \leq n_1 \leq L_{1j}$ e $0 \leq n_2 \leq L_{2j}$, tal que ao adotar a operação modular⁷, obtem-se:

⁶ Para detalhes sobre a FFT cita-se, como exemplo, uma das técnicas mais difundidas: Cooley e Tukey (1965).

⁷ Operação modular entre dois números a e b , refere-se à operação comumente referida por $\text{mod}(a, b) \Leftrightarrow a \text{ mod } b$ e que retorna o resto da divisão de a por b :

$$\text{mod}(a, b) \Leftrightarrow a \text{ mod } b := a - b \lfloor \frac{a}{b} \rfloor. \quad (1.30)$$

$$\mathcal{W}\{\mathfrak{C}[n_1 \bmod L_{1j}, n_2 \bmod L_{2j}]\} = \mathfrak{C}[n_1, n_2], \quad (1.31)$$

em uma correspondência um-para-um. Por fim, os coeficientes são encontrados aplicando a transformação inversa de Fourier.

Curvelets na última escala são um problema a parte na discretização. Para estas, [Candès et al. \(2005\)](#) propõe uma solução simples, consistindo em utilizar curvelets sub-amostradas através de periodização espectral. No entanto, esta aproximação produzirá falseamento, como ilustrado na figura 3b. Apesar disto, como demonstrado pelos autores, a parte do espectro referente ao falseamento, constitui somente um terço da banda, além de concentrar a maior parte da energia (92,4%).

Sumariza-se o algoritmo como:

- 1 Aplicação da 2D FFT produzindo $F[n_1, n_2]$, para $-n/2 \leq n_1, n_2 < n/2$;
- 2 para cada j e l calcula-se o produto $F[n_1, n_2] \check{\chi}_{j,l,k}[n_1, n_2]$;
- 3 calcula-se $\mathcal{W}\{\mathfrak{C}[n_1 \bmod L_{1j}, n_2 \bmod L_{2j}]\}$;
- 4 utiliza-se a 2D FFT inversa a cada janela do item anterior, obtendo assim os coeficientes $\check{\mathfrak{c}}_{j,l,k}$.

A transformada wrapping é uma isometria, como discutido em [Candès et al. \(2005\)](#), de forma que sua inversa pode ser calculada pela aplicação dos processos acima enumerados, na ordem reversa. Além disso, sua complexidade computacional é $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ para um sinal 2D com dimensões $n \times n$.

A figura 5 mostra a decomposição curvelet em 4 escalas, para 16 orientações na escala de menor detalhe. Na parte central, está a banda de menores frequências (passa-baixa) e o nível de detalhe aumenta com a distância do centro da imagem. Para cada escala, as respectivas sub-bandas de orientação, estão dispostas ao longo dos anéis quadrados, onde sua localização implica a posição relativa, no domínio de Fourier, que sua função curvelet associada ocupa. Quatro quadrantes estão destacados, os primeiro e terceiro representam as partes reais e imaginárias dos coeficientes curvelet (complexos), criados por curvelets orientadas quase-horizontalmente. Os segundo e quarto, por sua vez, são as componentes dos coeficientes produzidos por curvelets quase-verticais. Ressalta-se que, apesar de complementares, as partes reais e imaginárias, serão tratadas, individualmente, como coeficientes.

Por fim, considerando a redundância (\mathfrak{r}) da transformada como a razão entre coeficientes curvelet e o número de amostras do sinal, pressupondo $n = 512$, uma decom-

Figura 5 – Decomposição curvelet de uma imagem teste (a), 2048×2048 , em 4 escalas, com 16 orientações na banda de menor detalhe. Em (b), cores mais escuras são mais próximas de 0, as linhas representam o limite entre quadrantes e a escala das sub-bandas aumenta com a distância do centro da imagem, onde está localizada a componente passa-baixa.



Fonte: O autor.

posição em 6 escalas e, inicialmente⁸ 16 orientações em $j = 2$, $\tau \approx 7.23$. Este valor pode ser, significativamente, reduzido ao considerar wavelets na última escala, caso em que $\tau \approx 2.82$. No entanto, para o propósito deste trabalho, a maior redundância, assim como a necessidade de distinguir objetos associados a maiores frequências e com várias orientações (como os associados aos refletores sísmicos), optou-se por curvelets na escala de maior resolução.

1.4 Sumário e conclusões

Neste capítulo, foi exposta a teoria por trás da transformada Curvelet, desde sua formulação contínua até o algoritmo numérico que a implementa. De certa forma, a discussão foi realizada brevemente, uma vez que não é o foco do trabalho. Ainda assim, acredita-se que todos os conceitos necessários ao entendimento do próximo capítulo, foram bem elucidados.

Tendo apresentado a formulação matemática por trás da CT, a próxima parte deste trabalho busca explorar as características de um sinal no domínio transformado, de forma a compreender como, de um sinal corrompido por ruído, é possível recuperar a informação relevante. Duas técnicas são detalhadas e, posteriormente (em próximo capítulo), serão comparados.

⁸ Adiciona-se que o número de orientações em $j = 2$, não necessita ser 2, basta que, as respectivas alterações à formulação acima sejam realizadas. De fato, como disponibilizado em www.curvelet.org, o algoritmo computacional permite a seleção deste parâmetro.

2 Remoção de ruídos

Introduzidos os principais conceitos por trás da transformada Curvelet, este capítulo dedica-se à discussão sobre como explorá-los objetivando a atenuação de ruídos.

Grande parte dos métodos voltados ao problema do tratamento de ruído operam no domínio de alguma transformada (wavelet, contourlet, curvelet, etc.), em uma busca pela melhor distinção entre o sinal corrompido e o que corrompe. Reconhecendo que cada tipo de dado possui uma característica específica, assim como que o ruído pode existir em diversas formas, haverá uma transformada específica para cada caso.

Dentro do objetivo deste trabalho, da discussão anterior sobre a CT e, levando em conta as propriedades inerentes à representação visual do dado sísmico, a escolha da CT parece óbvia, compreendendo os “horizontes” sísmicos (em $2D$) como objetos com descontinuidades ao longo de curvas C^2 .

Em geral, algoritmos construídos para atenuação de ruídos, exploram alguma forma de truncamento da parte do conjunto de dados analisados. Tomando, como exemplo, a filtragem pela transformada wavelet, sua propriedade de representação esparsa, consequência desta ser uma base incondicional (DONOHO, 1993), garante que a maior parte da energia de um sinal se concentre em um pequeno número de coeficientes. Desta forma, ao considerar a presença de ruído, em prática, selecionar os coeficientes com maior energia é suficiente para recuperar o sinal não contaminado.

Ao considerar os métodos baseados em transformadas, uma divisão comumente utilizada é em relação ao processo de truncamento envolvido. Tem-se, assim, os métodos por truncamento abrupto, do inglês *hard thresholding*; e suave, ou *soft thresholding*. Enquanto ambos descartam (zeram) os coeficientes com magnitude inferior a um limiar preestabelecido, eles distinguem-se quanto ao tratamento dos demais coeficientes, de forma que o abrupto os mantém inalterados e o suave reduz suas magnitudes de um valor igual ao limiar definido. Para discussão mais detalhada, incluindo uma análise comparativa, a respeito destes, indicam-se: Burrus, Gopinath e Guo (1998, p. 206-207) ou Pizurica (2002, p. 30).

Escolher o método mais adequado ao problema em mãos envolve compreender tanto a natureza do dado filtrado quanto a informação que se deseja remover. Tomando o caso do sinal sísmico, aqui tratado, como exemplo, têm-se uma sobreposição de ruídos, tanto correlacionáveis quanto não, com origens diversas: *ground-roll*, estático, múltiplas, ambiental, associado aos equipamentos eletrônicos e mais (veja Yilmaz (2001, c. 1-6)); alguns, possivelmente, sequer identificados, devido à dificuldade em distingui-los. Aqui no entanto, focando no pré-condicionamento para inversão acústica pós-empilhamento,

supõe-se um dado já processado para a maior parte dos ruídos.

Nas seções seguintes, duas técnicas são discutidas, a primeira utilizando truncamento abrupto dos coeficientes curvelet e a segunda, uma forma mais robusta de seleção do limiar de corte (*threshold*). Posteriormente, sua performance em dados sísmicos será analisada.

2.1 Truncamento abrupto

Quando da atenuação de ruídos envolvendo alguma forma de truncamento, o primeiro passo é determinar o modelo representativo da contaminação do sinal. Após, deve-se estimar o nível, ou energia, do ruído, uma vez que, comumente, determina-se o limiar de corte em função desta. Dentro do escopo deste trabalho, utiliza-se a premissa de um ruído gaussiano branco ($\varepsilon \sim \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma_r^2)$) em um modelo aditivo (abrevia-se por AWGN):

$$I = y + \sigma_r \varepsilon; \quad (2.1)$$

onde σ_r representa o desvio padrão controlando a energia do ruído.

Em sua forma mais simples, o truncamento abrupto no domínio curvelet, pode ser realizado globalmente ao ordenar os coeficientes, independente de escala ou orientação,¹ em relação à sua magnitude e, subsequentemente, igualar a zero aqueles com valores abaixo de um determinado limiar $\gamma \tilde{\sigma}_r$, múltiplo real ($\gamma \in \mathbb{R}$) da variância estimada para o ruído ($\tilde{\sigma}_r^2$).

No entanto, ignorar a particularidade da informação fornecida pelas diferentes sub-bandas, é abrir mão de melhores resultados quando da atenuação de ruídos. De fato, para dados sísmicos, [Górszczyk, Adamczyk e Malinowski \(2014\)](#) demonstra que o nível de corte empiricamente selecionado para escalas e orientações, fornece resultados muito superiores a uma simples atenuação global dos coeficientes, apesar de tal procedimento exigir muita interação humana e ser, por consequência, muito demorado.

Desta forma, seguindo as ideias em [Starck, Candès e Donoho \(2002\)](#), dentro da metodologia discutida nesta seção, inicialmente, o nível de corte utilizado foi $\gamma = c + 1$ ² para os coeficientes na escala de maior resolução e $\gamma = c$ para as demais, exceto, como padrão, para a escala $j = 1$, onde os coeficientes foram mantidos inalterados. Posteriormente, buscando resultados mais robustos, uma análise sobre a variação do nível de corte, similar à apresentada em [Górszczyk, Adamczyk e Malinowski \(2014\)](#), é realizada.

De forma matemática, todo o processo de filtragem discutido, pode ser sumarizado

¹ Daqui em diante, utiliza-se a notação: $\mathbf{c}_i \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{c}}_{j,l,k}$, para o conjunto de coeficientes curvelet em cada sub-banda i , implicando $i = (j, l)$. Sua ordenação respeita a implementação digital discutida ([CANDÈS et al., 2005](#)).

² c é uma constante, empiricamente selecionada, discutida na seção relativa aos resultados.

como:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}, & \text{se } |\mathbf{c}| \geq \gamma\sigma_r\tilde{\sigma}_r; \\ \hat{\mathbf{c}} = 0, & \text{se } |\mathbf{c}| < \gamma\sigma_r\tilde{\sigma}_r \end{cases}; \quad (2.2)$$

com $\hat{\mathbf{c}}$ os coeficientes curvelet estimados, filtrados. As constantes σ_r (se não conhecida) e $\tilde{\sigma}_r$ são estimadas como discutido na seção 2.3.

Vale ressaltar que, a necessidade em utilizar múltiplos da variância estimada, é consequência da transformação curvelet, ainda que linear, converter ruído aditivo não-correlacionável (AWGN), em correlacionado. Da mesma forma que para a transformada wavelet não-decimada, a transformação do ruído considerando cada sub-banda, é função dos filtros a estas associados (PIZURICA, 2002); na transformação curvelet a distribuição do ruído estará relacionada às curvelets, em cada escala e orientação. Isto, por sua vez, justificará resultados mais robustos quando utilizando técnicas em que o nível de truncamento é adaptado às sub-bandas.

A metodologia discutida nesta seção, assim como suas variações, discutidas no próximo capítulo (4.3), são consideradas como a abordagem 1 deste trabalho, sendo assim referidas no capítulo de resultados 5.

2.2 Truncamento suave — *ProbShrinkCurv*

Considerando a vasta bibliografia sobre atenuação de ruídos no domínio curvelet, principalmente no que diz respeito a imagens naturais, uma desvantagem em empregar-se a metodologia acima discutida é a notável presença de artefatos abruptos, com forma semelhante às curvelets, próximo às descontinuidades na imagem filtrada; aumentando proporcionalmente ao nível de ruído. Além disso, a imagem resultante possuirá uma variância maior, de forma que pequenas variações (diga-se *trends* suaves) não serão devidamente reconstruídas (PIZURICA, 2002).

Buscando resultados superiores quando da eliminação do ruído, evitando principalmente os artefatos acima mencionados e visando um método semi-automático capaz de tratar as sub-bandas curvelet individualmente; a técnica de truncamento suave, *ProbShrinkCurv*, foi adotada.

Consistindo, resumidamente, de uma adaptação para a CT do método e ideias desenvolvidas para a Wavelet, em Pizurica e Philips (2006); esta foi inicialmente apresentada em Tessens et al. (2006b) e, subsequentemente, aperfeiçoada por Tessens et al. (2006a) e Tessens et al. (2008).

De forma semelhante à seção anterior, assume-se um modelo de ruído aditivo não-correlacionável, sob premissa deste possuir distribuição normal com média zero (equação 2.1), AWGN. No entanto, considera-se cada sub-banda curvelet i individualmente. Relem-

brando a propriedade de frame compacto, o desvio padrão do ruído para cada conjunto de coeficientes \mathbf{c}_i , é função da redundância da transformação, tal que: $\sigma'_r = \sigma_r/\sqrt{\mathbf{t}}$. Obtem-se, então, 2.1 no domínio curvelet como:

$$\mathbf{c}_i = \tilde{\mathbf{c}}_{i+} \sim \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma_r'^2); \quad (2.3)$$

onde $\tilde{\mathbf{c}}_i$ diz respeito aos coeficientes da imagem sem ruído.

A estes ($\tilde{\mathbf{c}}_i$), como demonstrado nos trabalhos Boubchir e Fadili (2005) e Alecu et al. (2006), é possível associar uma distribuição Laplaciana generalizada³ *a priori*. Sua função densidade de probabilidade (fdp) é:

$$f(\tilde{\mathbf{c}}_i) = \frac{\lambda v}{2\Gamma(1/v)} \exp(-|\lambda \tilde{\mathbf{c}}_i|^v); \quad (2.4)$$

com $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ a função Gamma, e as constantes λ e v , parâmetros intrínsecos à distribuição considerada, diretamente relacionados à variância e quarto momento. Respektivamete, tem-se as equações para o segundo momento central e a curtose do histograma (SIMONCELLI; ADELSON, 1996):

$$\sigma_{\tilde{\mathbf{c}}_i}^2 = \frac{\Gamma(3/v)}{\lambda^2 \Gamma(1/v)} \quad \text{e} \quad \kappa_{ur_{\tilde{\mathbf{c}}_i}} = \frac{\Gamma(1/v)\Gamma(5/v)}{\Gamma^2(3/v)}. \quad (2.5)$$

Tomando como referencial o limiar de corte \mathbf{t} , cada sub-banda de uma imagem, sem ruído, no domínio da CT pode ser dividida em coeficientes significantes e insignificantes, referindo-se, respectivamente, à presença ou não da informação relevante⁴. Tem-se, então, duas hipóteses:

$$\begin{cases} H^0 : \text{“insignificante”} \Leftrightarrow |\tilde{\mathbf{c}}_i| \leq \mathbf{t} \\ H^1 : \text{“significante”} \Leftrightarrow |\tilde{\mathbf{c}}_i| > \mathbf{t} \end{cases}; \quad (2.6)$$

para um conjunto de coeficientes, quanto à sua significância. Desta forma, em consequência do modelo fdp *a priori* adotado (2.4), as fdps associadas às hipóteses H^0 e H^1 podem ser modeladas, respectivamente, pela parte central e pelas caudas da Laplaciana generalizada, tal que:

$$f(\tilde{\mathbf{c}}_i|H^0) = \begin{cases} A_0 \exp(-\lambda|\tilde{\mathbf{c}}_i|^v), & \text{se } |\mathbf{c}| \leq \mathbf{t} \\ 0, & \text{se } |\mathbf{c}| > \mathbf{t} \end{cases}; \quad (2.7a)$$

$$f(\tilde{\mathbf{c}}_i|H^1) = \begin{cases} 0, & \text{se } |\mathbf{c}| \leq \mathbf{t} \\ A_1 \exp(-\lambda|\tilde{\mathbf{c}}_i|^v), & \text{se } |\mathbf{c}| > \mathbf{t} \end{cases}; \quad (2.7b)$$

com A_0 e A_1 , constantes de normalização discutidas no apêndice A.

³ Comumente referida, na literatura em português, como Normal generalizada.

⁴ Relevância neste sentido, diz respeito à enegia percentual do coeficiente, em relação à energia total da sub-banda.

Adiciona-se que, apesar de \mathbf{t} não ser discutido nesta seção, de forma análoga ao método da seção anterior, este é função do nível de ruído do sinal. Em [Tessens et al. \(2008\)](#), ele é determinado empiricamente como o que gerou melhores resultados, dado o conjunto amostral de imagens naturais utilizados.

Considerando coeficientes corrompidos por ruído (\mathbf{c}_i em 2.3), a variância e o quarto momento da distribuição Laplaciana generalizada (2.4) referente, $f(\mathbf{c}_i)$, serão ([SIMONCELLI; ADELSON, 1996](#)):

$$\sigma_{\mathbf{c}_i}^2 = \sigma_r'^2 + \frac{\Gamma(3/v)}{\lambda^2\Gamma(1/v)} \quad \text{e} \quad m_{4,\mathbf{c}_i} = 3\sigma_r'^4 + \frac{6\sigma_r'^2\Gamma(3/v)}{\lambda^2\Gamma(1/v)} + \frac{\Gamma(5/v)}{\lambda^4\Gamma(1/v)}. \quad (2.8)$$

Partindo destes encontra-se a curtose da fdp $f(\mathbf{c}_i)$:

$$\kappa_{ur_{\mathbf{c}_i}} = \frac{\Gamma(1/v)\Gamma(5/v)}{\Gamma^2(3/v)} = \frac{m_{4,\mathbf{c}_i} + 3\sigma_r'^4 - 6\sigma_r'^2\sigma_{\mathbf{c}_i}^2}{(\sigma_{\mathbf{c}_i}^2 - \sigma_r'^2)^2}. \quad (2.9)$$

Formulando as mesmas hipóteses, H^0 e H^1 , para os coeficientes com ruído, \mathbf{c}_i , as fdps dos coeficientes significantes e insignificantes podem ser modeladas pela convolução da fdp dos coeficientes sem ruído, $f(\tilde{\mathbf{c}}_i|H^0)$ e $f(\tilde{\mathbf{c}}_i|H^1)$, e pela fdp Gaussiana $\vartheta(0, \sigma_r')$:

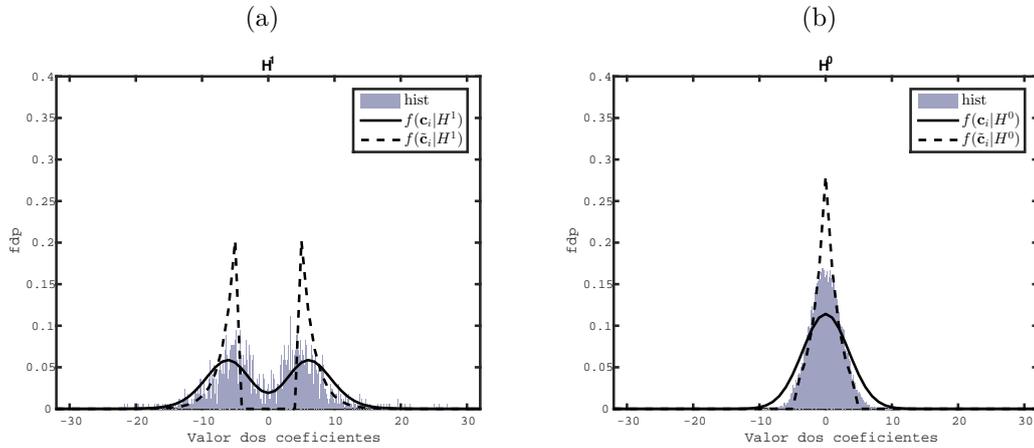
$$f(\mathbf{c}_i|H^0) = f(\tilde{\mathbf{c}}_i|H^0) * \vartheta(0, \sigma_r') \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(\mathbf{c}_i - \tilde{\mathbf{c}}, \sigma_r') f(\tilde{\mathbf{c}}_i|H^0) d\tilde{\mathbf{c}}_i; \quad (2.10a)$$

$$f(\mathbf{c}_i|H^1) = f(\tilde{\mathbf{c}}_i|H^1) * \vartheta(0, \sigma_r') \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(\mathbf{c}_i - \tilde{\mathbf{c}}, \sigma_r') f(\tilde{\mathbf{c}}_i|H^1) d\tilde{\mathbf{c}}_i. \quad (2.10b)$$

Ressalta-se que as fdps acima, 2.10a e 2.10b, são derivadas sob a condição de ruído branco, ou seja, os coeficientes curvelet do sinal serem estatisticamente independentes dos coeficientes do ruído. No entanto, como já comentado, a CT transforma o ruído branco em correlacionável, o que invalida os modelos para as fdps, $f(\mathbf{c}_i|H^0)$ e $f(\mathbf{c}_i|H^1)$, adotados. Apesar disso, [Tessens et al. \(2006b\)](#) e [Tessens et al. \(2008\)](#), assim como a figura 6, criada para decomposição curvelet de versão com ruído AWGN da imagem *Lena*⁵, mostram que, em prática, eles são válidos.

⁵ Para mais informações sobre esta imagem, incluindo sua origem, cita-se: [Hutchinson \(2001\)](#).

Figura 6 – Histograma, com 500 intervalos, dos coeficientes curvelet significantes (a), e insignificantes (b), em sub-banda da escala de maior detalhe, para a imagem *Lena*. As fdps sobrepostas aos histogramas, descritas pelas linhas tracejada e contínua, representam as funções estimadas para os coeficientes sem ruído ($f(\tilde{\mathbf{c}}_i|H^0)$ e $f(\tilde{\mathbf{c}}_i|H^1)$) e com ($f(\mathbf{c}_i|H^0)$ e $f(\mathbf{c}_i|H^1)$), respectivamente.



Fonte: O autor.

2.2.1 Remoção adaptada à sub-banda

Utilizando as definições anteriores, é possível construir uma função de redução do ruído, específica a cada sub-banda, capaz de reduzir os coeficientes de acordo com a probabilidade que contenham informação relevante e, subseqüentemente, recuperar o sinal não corrompido.

Para tal, uma aproximação, comumente adotada, é buscar os coeficientes $\hat{\tilde{\mathbf{c}}}_i$ que minimizem o erro quadrático médio $E((\hat{\tilde{\mathbf{c}}}_i - \mathbf{c}_i)^2)$. O estimador que satisfaz esta condição é dado pela esperança condicional $E(\tilde{\mathbf{c}}_i|\mathbf{c}_i)$ (BERTSEKAS; TSITSIKLIS, 2008, p. 430-431). Utilizando a lei das expectativas iteradas, é possível definir este estimador em função das partes significantes e insignificantes do sinal. Tem-se, então:

$$\hat{\tilde{\mathbf{c}}}_i = E(\tilde{\mathbf{c}}_i|\mathbf{c}_i) = E(\tilde{\mathbf{c}}_i|\mathbf{c}_i, H^0)P(H^0|\mathbf{c}_i) + E(\tilde{\mathbf{c}}_i|\mathbf{c}_i, H^1)P(H^1|\mathbf{c}_i). \quad (2.11)$$

Devido $E(\tilde{\mathbf{c}}_i|\mathbf{c}_i, H^0)$ representar o valor médio de $\tilde{\mathbf{c}}_i$, considerando os coeficientes \mathbf{c}_i e que o sinal de interesse está ausente, é esperado que este valor seja zero. Além do mais,

aproxima-se $E(\tilde{\mathbf{c}}_i|\mathbf{c}_i, H^1)$ por \mathbf{c}_i ⁶. O estimador em 2.11 será, então:

$$\hat{\mathbf{c}}_i = P(H^1|\mathbf{c}_i)\mathbf{c}_i. \quad (2.12)$$

Aplicando o teorema de Bayes em $P(H^1|\mathbf{c}_i)$ e utilizando a lei da probabilidade total para decompor $f(\mathbf{c}_i)$ em componentes condicionadas às hipóteses H^1 e H^0 , escreve-se:

$$P(H^1|\mathbf{c}_i) = \frac{f(\mathbf{c}_i|H^1)P(H^1)}{f(\mathbf{c}_i)} \Leftrightarrow \frac{f(\mathbf{c}_i|H^1)P(H^1)}{f(\mathbf{c}_i|H^1)P(H^1) + f(\mathbf{c}_i|H^0)P(H^0)}. \quad (2.13)$$

Definindo os parâmetros $\mathbf{p} = P(H^1)/P(H^0)$ e $\mathbf{n} = f(\mathbf{c}_i|H^1)/f(\mathbf{c}_i|H^0)$, onde seu produto é conhecido como razão de máxima verossimilhança generalizada, é possível reescrever 2.13 como:

$$P(H^1|\mathbf{c}_i) = \frac{\mathbf{pn}}{1 + \mathbf{pn}}. \quad (2.14)$$

Inserindo a função 2.14 em 2.12, tem-se a regra para redução, em cada sub-banda, dos coeficientes curvelet proporcionalmente à sua probabilidade de conter informação significativa:

$$\hat{\mathbf{c}}_i = \frac{\mathbf{pn}}{1 + \mathbf{pn}}\mathbf{c}_i. \quad (2.15)$$

2.2.2 Remoção adaptada à sub-banda e ao contexto espacial local

A filtragem, como discutida na subseção anterior, distingue os coeficientes em magnitudes de relevância e não. Desconsidera, assim, informação sobre posições espaciais ou tendências locais destes. Interpretando a CT como uma decomposição do sinal por um banco de filtro direcional, entende-se que levar em conta a informação espacial local dos coeficientes é fundamental na obtenção de resultados mais robustos.

Em Boubchir e Fadili (2005) e Alecu et al. (2006), um estudo das dependências estatísticas intra e entre sub-bandas dos coeficientes curvelet sem ruído, foi realizado. Nestes, os autores observaram que existem correlações tanto intra-banda quanto entre escalas e orientações, apesar de que, para o caso intra-banda, a dependência estatística seja, significativamente, maior. Além disso, foi observado que: a correlação entre sub-bandas diminui com o aumento da diferença de orientação destas, exceto para a sub-banda oposta (orientada na direção perpendicular à de referência); e, coeficientes da mesma sub-banda, estão mais correlacionados na direção paralela à da curvelet correspondente, ou seja, perpendicular à orientação da sub-banda.

⁶ Discute-se, em Pizurica (2002), que esta simplificação é feita por razões práticas, quando não se possui informação *a priori* para estimar $E(\tilde{\mathbf{c}}_i|\mathbf{c}_i, H^1)$. No entanto, tanto para o caso da autora citada (que utiliza a transformada Wavelet), quanto para o caso aqui em questão (CT em Tessens et al. (2008)), é um tópico aberto à pesquisa, a utilização de expressões exatas para $E(\tilde{\mathbf{c}}_i|\mathbf{c}_i, H^1)$; ou mesmo aproximações mais consistentes, como em McAulay e Malpass (1980) e Ephraim e Malah (1984).

Tessens et al. (2006b), Tessens et al. (2006a) e Tessens et al. (2008), estenderam esta análise para coeficientes significantes e insignificantes (hipóteses 2.6). Os trabalhos mostram que, da mesma forma que para os coeficientes livres de ruído (parágrafo anterior), tanto os significantes quanto os não, tem maior correlação com coeficientes na direção perpendicular à orientação da sub-banda⁷. Por outro lado, para seus vizinhos com orientação paralela, os insignificantes são praticamente independentes, enquanto os significantes tem menor correlação. Estas mesmas conclusões foram obtidas para análise dos coeficientes entre sub-bandas. Subsequentemente, utilizando estas observações, para cada coeficiente são propostos *Local Spatial Activity Indicators*(LSAIs), funções dos coeficientes mais bem correlacionados, quando o coeficiente de referência é significativo.

Dentre todos os LSAIs propostos, o *Combined intra- and inter-band LSAI*(IIB LSAI), apresentado em Tessens et al. (2008), foi o que, em geral, apresentou melhores resultados. Por este motivo, ele foi o adotado no presente trabalho.

Utilizando terminologia como em Boubchir e Fadili (2005) e Alecu et al. (2006), define-se, para cada coeficiente:

- N_k como o coeficiente vizinho, na mesma sub-banda, com k referindo-se aos 8 vizinhos mais próximos, começando pelo superior esquerdo e continuando em sentido horário.
- C_l como o primo, localizado na mesma posição relativa que o coeficiente de referência, mas em uma sub-banda diferente da mesma escala j . As sub-bandas, em cada escala, são numeradas da mesma forma que os vizinhos, com a primeira sendo a esquerda superior e as próximas numeradas em ordem crescente no sentido horário (veja figura 5b).
- P como o parente, localizado na mesma posição relativa e mesma sub-banda de orientação, mas em escala diferente.

Com esta notação, o IIB LSAI (z), é definido pela equação:

$$z = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} (|C_{l-1}| + |C_{(l+1) \bmod L}| + |C_{(l+L/2) \bmod L}| + |P|) + \frac{1}{n-1} \sum_{k \in \mathfrak{r}} |N'_k| \right], \quad (2.16)$$

para $l \in [1, L]$, um inteiro, sendo L o número de sub-bandas da respectiva escala, e $C_0 = C_l$.

Os dois primeiros termos de z (2.16) referem-se aos primos adjacentes, associados às sub-bandas esquerda, C_{l-1} , e direita, $C_{(l+1) \bmod L}$, da analisada⁸. O terceiro termo trata do primo oposto, cuja sub-banda tem orientação perpendicular à da analisada. O quarto é o parente. O quinto, e último, representa o valor médio absoluto dos $n - 1$ (excetua-se o

⁷ É importante chamar a atenção, neste ponto, para a diferença entre a orientação da sub-banda e da sua respectiva curvelet. A direção em que a curvelet está orientada é sempre a perpendicular à orientação da sub-banda.

⁸ Mais uma vez, mod refere-se à operação modular, equação 1.30.

coeficiente de referência) coeficientes $N'_\mathfrak{r}$, pertencentes à vizinhança $\mathfrak{r} = 1 \times n$, orientada na direção da sub-banda (em que os coeficientes insignificantes são menos correlacionados). $N'_\mathfrak{r}$, por sua vez, são obtidos pela interpolação linear dos vizinhos mais próximos, N_k , e dos vizinhos destes (a depender do tamanho n da vizinhança \mathfrak{r}), uma vez que os coeficientes existem em uma malha retangular.

Seguindo o mesmo desenvolvimento da subseção anterior (2.2.1), ao condicionar a probabilidade de um coeficiente ser significativo também ao LSAI, modifica-se o estimador em 2.12 para:

$$\hat{\mathbf{c}}_i = P(H^1 | \mathbf{c}_i, z) \mathbf{c}_i. \quad (2.17)$$

Consequentemente, a razão de máxima verossimilhança generalizada conterá mais um termo $\mathbf{e} = f(z|H^1)/f(z|H^0)$, de forma que a regra de redução final será:

$$\hat{\mathbf{c}}_i = \frac{\mathbf{pne}}{1 + \mathbf{pne}} \mathbf{c}_i. \quad (2.18)$$

Por fim, conclui-se de 2.18, acima, que os coeficientes serão reduzidos de acordo com a probabilidade de conter informação relevante, considerando as propriedades estatísticas globais de sua sub-banda (\mathbf{p}), sua magnitude (\mathbf{n}) e uma medida característica à sua vizinhança (\mathbf{e}).

2.2.3 Estimativa das constantes intrínsecas ao método

A fim de encerrar a discussão sobre o método desta seção, resta tratar da estimativa das constantes associadas. Em geral, estas podem ser divididos em dois grupos: G1 - as relativas à distribuição *a priori* assumida para os coeficientes de cada sub-banda (Laplaciana generalizada), e G2 - as que compõem a razão de máxima verossimilhança generalizada.

G1 trata especificamente dos parâmetros λ e ν em 2.4, onde o último, comumente, assume valores entre $[0, 1]$ para imagens naturais (PIZURICA, 2002; PIZURICA; PHILIPS, 2006). Sua estimativa, para cada sub-banda, segue o proposto em Simoncelli e Adelson (1996). Admitindo conhecimento sobre a distribuição do ruído (σ'_r), assunto tratado na próxima seção, inicialmente calcula-se a variância e o quarto momento dos coeficientes \mathbf{c}_i da sub-banda da imagem. Observando que a expressão à esquerda em 2.9 é monotonicamente decrescente em ν , é possível aproximar numericamente esta constante, devido à igualdade em 2.9. Quanto ao parâmetro λ , através da manipulação algébrica da expressão para variância (dos coeficientes corrompidos) em 2.8, obtém-se a relação:

$$\lambda = \left[(\sigma_{\mathbf{c}_i}^2 - \sigma_r'^2) \frac{\Gamma(1/\nu)}{\Gamma(3/\nu)} \right]^{-1/2}; \quad (2.19)$$

com a qual, conhecendo v , estima-se λ diretamente.

G2 diz respeito às constantes: $\mathbf{p} = P(H^1)/P(H^0)$, $\mathbf{n} = f(\mathbf{c}_i|H^1)/f(\mathbf{c}_i|H^0)$ e $\mathbf{e} = f(z|H^1)/f(z|H^0)$. Para cada sub-banda, \mathbf{p} pode ser vista como a razão entre a probabilidade de seus coeficientes serem significantes e de não o serem, considerando a distribuição *a priori* adotada. A hipótese H^1 , por sua vez, implica que a probabilidade dos coeficientes possuírem relevância é igual à área sob as caudas da distribuição $f(\tilde{\mathbf{c}}_i)$ (2.4), ou seja:

$$P(H^1) = 1 - \int_{-t}^t f(\tilde{\mathbf{c}}_i) d\tilde{\mathbf{c}}_i. \quad (2.20)$$

Para o caso do modelo da fdp *a priori* considerado, esta equação pode ser reescrita utilizando a função Gamma incompleta, $\Gamma_{\text{inc}}(a, b) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^b t^{a-1} e^{-t} dt$ (veja apêndice A):

$$P(H^1) = 1 - \Gamma_{\text{inc}}((\lambda t)^v, 1/v). \quad (2.21)$$

Tem-se, então, que a razão entre a probabilidade de significância e de não, dos coeficientes, determinados os parâmetros da sua fdp (Laplaciana generalizada), possui a expressão analítica:

$$\mathbf{p} = \frac{P(H^1)}{P(H^0)} \Leftrightarrow \frac{1 - \Gamma_{\text{inc}}((\lambda t)^v, 1/v)}{\Gamma_{\text{inc}}((\lambda t)^v, 1/v)}. \quad (2.22)$$

A segunda constante de G2, \mathbf{n} , considera a magnitude dos coeficientes para determinar a probabilidade de que determinado valor esteja, ou não, associado a informação relevante. Ela é calculada utilizando as equações 2.10, anteriormente discutidas.

\mathbf{e} , a terceira e última constante, de G2, em questão, representa a probabilidade da magnitude de determinado coeficiente, estar associada a coeficientes significantes (ou insignificantes), e por consequência o próprio coeficiente, considerando um valor característico ao contexto espacial local deste. Relembrando o IIB LSAI aqui adotado, 2.16, pressupõe-se que a magnitude, de todos os coeficientes utilizados em seu cálculo, são identicamente distribuídas e condicionalmente independentes com relação às hipóteses H^1 e H^0 ⁹. Desta forma, as distribuições de probabilidade condicional $f(z|H^1)$ e $f(z|H^0)$ equivalem a $n + 3$ (número de coeficientes utilizados no cálculo de z) convoluções das fdps $f(|\mathbf{c}_i||H^1)$ e $f(|\mathbf{c}_i||H^0)$, com elas mesmas, uma vez que z é função da magnitude dos coeficientes:

$$f(z|H^1) = \underbrace{f(|\mathbf{c}_i||H^1) * f(|\mathbf{c}_i||H^1) * f(|\mathbf{c}_i||H^1) * \dots * f(|\mathbf{c}_i||H^1)}_{n+3}. \quad (2.23a)$$

$$f(z|H^0) = \underbrace{f(|\mathbf{c}_i||H^0) * f(|\mathbf{c}_i||H^0) * f(|\mathbf{c}_i||H^0) * \dots * f(|\mathbf{c}_i||H^0)}_{n+3}; \quad (2.23b)$$

⁹ Tais pressupostos, visando simplificar as características estatísticas do LSAI, são justificados no trabalho (TESSENS et al., 2008). O primeiro é embasado no fato de que os coeficientes em determinada vizinhança, possuem dependência estatística (estão correlacionados), como demonstrado pela análise estatística intra e entre bandas realizada no trabalho. O segundo, por sua vez, é demonstrado experimentalmente no trabalho citado.

Ressalta-se que as distribuições condicionais das magnitudes, acima, são obtidas através das fdps 2.10, segundo:

$$f(|\mathbf{c}_i||H^1) = 2f(\mathbf{c}_i|H^1) \quad \text{e} \quad f(|\mathbf{c}_i||H^0) = 2f(\mathbf{c}_i|H^0), \quad (2.24)$$

quando $|\mathbf{c}_i| \geq 0$, e, caso contrário, são iguais a zero.

2.3 Estimando o nível de ruído do sinal

Em estudos controlados, quando se tem informação sobre o dado analisado sem ruído — no caso deste trabalho seções sísmicas sintéticas — este é, comumente, conhecido, ou pode ser estimado diretamente (pelo resíduo entre o original e o corrompido). No entanto, o objetivo são dados reais, para os quais as características do ruído raramente podem ser exatamente descritas; ainda assim, indaga-se que, em certas situações onde o modelo físico-matemático envolvido é bem compreendido, boas aproximações à caracterização dos ruídos podem ser obtidas (Exemplifica-se pelos grandes avanços na área de processamento de imagens e visão computacional, veja por exemplo [Velho, Frery e Gomes \(2014\)](#)).

Quando trabalhando com a transformada Wavelet e considerando ruído AWGN, um estimador, robusto, muito empregado na área de atenuação de ruídos, é o *Median Absolute Deviation* (MAD) ou Desvio Mediano Absoluto, proposto em [Donoho e Johnstone \(1994\)](#). Em prática, diversos trabalhos concordam que a sub-banda de maior detalhe da Wavelet, contém, primariamente, ruído (ou, pode-se argumentar, que informação irrelevante, redundante, sem contribuição significativa à reconstrução do sinal). Em especial, para imagens, refere-se à sub-banda diagonal. Ainda assim, é possível que parte do sinal exista nesta sub-banda. Buscando evitar estas, ainda que raras, exceções, o MAD adota o desvio mediano absoluto dos coeficientes, dividido pelo valor 0.6745. Considerando \mathbf{w}_J a sub-banda wavelet de maior detalhe, o estimador MAD é:

$$\hat{\sigma}_{r,\text{MAD}} = \frac{\text{Mediana}(|\mathbf{w}_J - \text{Mediana}(\mathbf{w}_J)|)}{0.6745}. \quad (2.25)$$

A motivação para utilização da mediana reside no fato desta estatística ser pouco sensível a valores discrepantes, espúrios (quando sinal está presente), evitando o viés estatístico causado por estes. Mesmo sob um viés de 50% (metade da informação é discrepante), ainda é possível obter boas estimativas ([DONOHO; JOHNSTONE, 1994](#)).

Quanto ao valor 0.6745 em 2.25, justifica-se como em [Pizurica \(2002\)](#). Considerando o conjunto X_n , composto por N variáveis aleatórias, independentes e com distribuição $\sim \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$, observa-se que:

$$E \left(\text{Mediana}(|X_n - \text{Mediana}(X_n)|) \right) \approx 0.6745\sigma. \quad (2.26)$$

Para as duas formas de atenuação de ruídos, aqui discutidas, este estimador foi utilizado. No entanto, há diferenças sobre como ele foi aplicado.

Na técnica de truncamento abrupto, seção 2.1, seguindo o proposto em Starck, Candès e Donoho (2002), o nível de ruído é aproximado utilizando simulações Monte-Carlo, onde as CTs de um conjunto de imagens, criadas como ruído branco $\sim \mathcal{N}(\mu = 0, 1)$, são utilizadas para estimar $\tilde{\sigma}_r$ ¹⁰ em cada sub-banda curvelet, através do estimador MAD. Quanto ao valor σ_r , quando o ruído não é conhecido, deve ser estimado com o MAD, implicando a transformação Wavelet como etapa adicional.

A segunda técnica, seção 2.2, é fiel ao MAD, no sentido de que a intensidade do ruído, σ'_r , é calculada pela equação 2.25 na última sub-banda de orientação da última escala (maior detalhe).

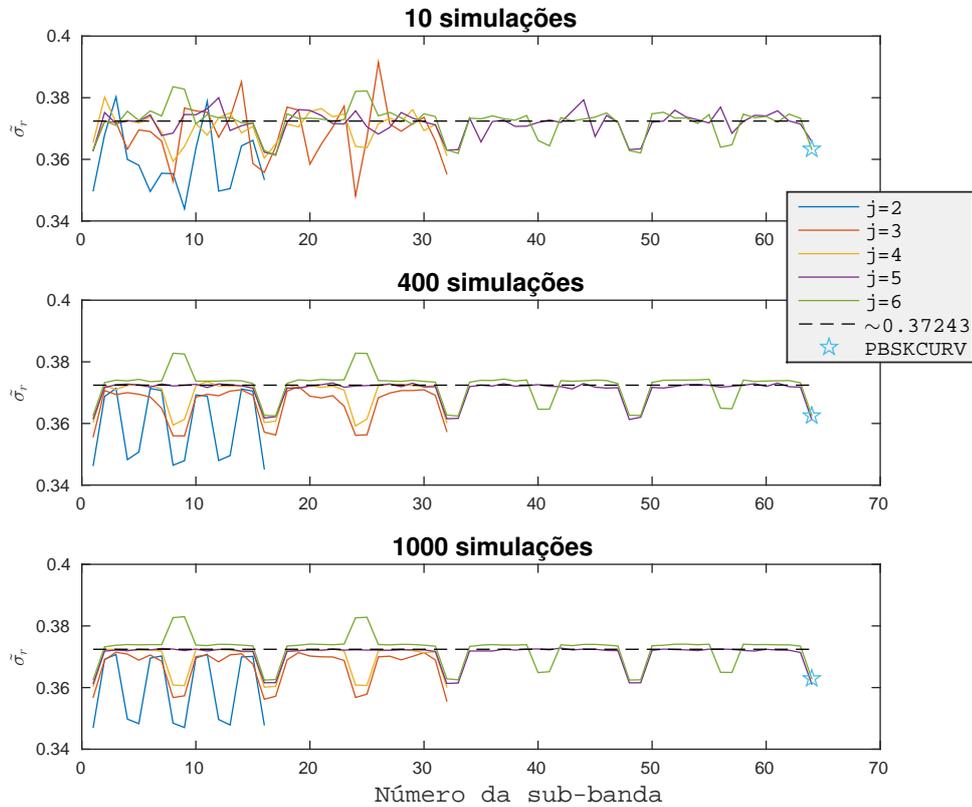
Para um ruído branco AWGN com $\sigma_r = 1$, a figura 7 compara as estimativas obtidas para os dois métodos. Inicialmente, observa-se bastante variação entre as sub-bandas, além de uma diferença entre os valores médios de cada escala. Isto justificaria utilizar a estimativa do primeiro método e, uma vez que não há grandes mudanças de 10 para 1000 simulações, ou mesmo para 400, um valor pequeno parece aceitável, o que reduz significativamente o custo computacional.

No entanto, atentando aos limites dos eixos verticais, nota-se que a variação dos valores é menor que 0.06, aproximadamente 16% do valor esperado (0.37285), implicando que as variações são pequenas. Consequentemente, devido à menor complexidade computacional, a estimativa como no segundo método parece mais atraente.

Da discussão acima, é possível concluir que não há uma forma de estimativa superior. Enquanto uma garante maior acurácia a outra oferece eficiência computacional.

¹⁰ Nesta seção, os símbolos utilizados nas seções referidas, são preservados, a fim de facilitar a compreensão.

Figura 7 – Variação da estimativa do nível de ruído, para cada sub-banda, em função do número de simulações Monte-Carlo com conjunto de imagens de ruído branco $\sim \mathcal{N}(\mu = 0, 1)$. Na legenda, j refere-se à escala curvelet, PBSKCURV ao valor utilizado pelo *ProbShrinkCurv* e ~ 0.37285 é o valor esperado, considerando a redundância da transformada.



Fonte: O autor.

2.4 Sumário e conclusões

Neste capítulo, foram discutidas as técnicas de atenuação de ruídos aqui adotadas. Uma utiliza truncamento abrupto (2.1) e a outra, suave (2.2). De certa forma, sua escolha, representa a lógica de evolução deste trabalho. Enquanto a primeira representa um primeiro estágio, uma técnica menos complexa, de mais fácil compreensão; a segunda está associada à busca por um método mais robusto, matematicamente elegante e que saiba explorar melhor as propriedades da CT.

Para os dois métodos discutidos, admite-se um modelo com ruído AWGN. No entanto, ainda que esta premissa seja o mais comum na área de atenuação de ruídos, entende-se que, devido à natureza do dado sísmico, ruídos com banda limitada à do sinal, são mais prováveis. De fato, a performance das técnicas acima, para a última situação, será analisada, buscando compreender até onde elas são válidas. Vale ressaltar que, pela definição do *ProbShrinkCurv*, contanto que o modelo para o ruído seja aditivo e branco,

outras distribuições poderiam ser utilizadas.

O último parágrafo abriu a questão sobre a validade, dos métodos utilizados, no mundo real. Indaga-se por fim, sobre sua competência para dados sísmicos. Surge então a verdadeira questão: Até que ponto uma imagem sísmica é similar a uma natural?

Grande parte da literatura trata seções sísmicas como imagens naturais, mas há diferenças significativas. A natureza do dado sísmico é bem específica (VENTOSA; RABESON; DUVAL, 2011); cita-se, por exemplo, a questão dos processos físicos associados à aquisição, não serem os mesmos. Enquanto imagens naturais são baseadas no sistema de percepção visual humano, sendo uma representação de cenas, fisicamente, visíveis; imagens sísmicas são uma representação numérica da interação de um sinal (artificialmente criado) com a geologia em subsuperfície. Observa-se, então, uma imagem visualmente única, com estruturas espaciais associadas à geometria dos horizontes, falhas, domos de sal, etc (LONG; WANG; ALREGIB, 2015).

Por outro lado, focando em suas similaridades, Bakker, Vliet e Verbeek (1999) entende “imagens” sísmicas como imagens naturais de banda limitada contendo estruturas em camadas (*layered*). Sob esta premissa, Ma e Yu (2017) adiciona, que os dados sísmicos compartilham a mesma configuração com imagens naturais, como descontinuidades suaves em algumas direções.

Dentro do propósito deste trabalho, similaridades e/ou diferenças entre os dois tipos de dados devem ser avaliadas quando sob a transformação Curvelet. Só assim será possível afirmar sobre a validade das técnicas em questão. Neste sentido, o próximo capítulo dedicará uma seção à análise estatística das sub-bandas curvelet dos dados sísmicos, em contraste às discussões em Boubchir e Fadili (2005) e Alecu et al. (2006), quanto a imagens naturais.

3 Inversão acústica pós-empilhamento

O objetivo dos métodos de inversão sísmica é determinar um modelo físico para sub-superfície, coerente com os dados adquiridos. Diversas abordagens a este problema inverso existem, cada qual com suas características específicas. Neste trabalho, trata-se o caso acústico para dados sísmicos *zero-offset*, ou seja, pós-empilhamento. Desta forma, objetiva-se estimar um modelo de impedância acústica (produto da densidade do meio pela velocidade de propagação da onda P no mesmo), capaz de produzir um dado sintético, que seja o mais próximo possível do real (observado).

Aqui, as técnicas de inversão são utilizadas como métrica quantitativa da performance dos métodos para atenuação de ruídos. Sendo assim, evita-se uma explicação teórica pormenorizada tanto do problema quanto dos diversos conjuntos de técnicas para sua solução. A discussão abaixo restringe-se às técnicas utilizadas. Indica-se, no entanto, [Gomes \(2014\)](#) para uma discussão mais completa sobre inversão acústica pós-empilhamento do traço sísmico e os trabalhos [Menke \(1989\)](#) e [Zhdanov \(2002\)](#), para discussão mais abrangente sobre o problema sísmico inverso e abordagens utilizadas em sua solução.

Nas seções seguintes, serão apresentados dois métodos de inversão do traço sísmico, sob premissa de um sinal de afastamento nulo, onde um fluxo de processamento¹ padrão, pré-empilhamento, tenha sido aplicado. Desta forma, o problema direto, a modelagem dos dados, é considerado como a convolução do pulso sísmico estimado e a refletividade, ou seja, adota-se o modelo convolucional ([ROBINSON, 1954](#));

3.1 Inversão sob regularização de esparsidade

Um problema inerente à inversão sísmica, é a ausência da informação nas baixas frequências do sinal. Adotar um bom modelo inicial como informação *a priori* é suficiente para garantir uma solução satisfatória. Além disso, inserir regularizações garantindo que os modelos calculados sejam um sequência de deltas esparsos, é uma abordagem elegante para aumentar a banda de frequências.

Utilizando um referencial Bayesiano, tanto normas que garantam esparsidade (como exemplo: Huber, Cauchy e L1) quanto dependência a informação prévia, podem ser introduzidas na busca de um modelo de camadas “em blocos” ([ULRYCH; SACCHI, 2005](#)). A função objetivo aqui postulada, é:

$$\mathbf{J} = \kappa |\mathbf{m}|_{L1} + \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\hat{\sigma}_r} (\mathbf{W}\mathbf{m} - \mathbf{s}) \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \mathbf{N}^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{m} - \mathbf{B}) \right\|^2, \quad (3.1)$$

¹ A respeito do processamento de dados sísmicos, detalhando sobre as diversas correções e análises realizadas, cita-se [Yilmaz \(2001\)](#).

com o primeiro termo representando a regularização de esparsidade (norma $L1$) do modelo de refletividade (\mathbf{m}), o segundo responsável pela minimização do erro entre os traços observado (\mathbf{s}) e calculado ($\mathbf{W}\mathbf{m}$); e o último, introduz restrição baseada no modelo *a priori*.

κ controla a esparsidade admitida na solução, $\hat{\sigma}_r$ é uma estimativa do nível de ruído, \mathbf{W} é a matriz de convolução característica da ondaleta, \mathbf{C} é um operador de integração (da soma cumulativa) e \mathbf{B} é o logaritmo natural da impedância normalizada. A matriz \mathbf{N} , é diagonal e possui elementos $\mathbf{N}_{m=n} = \boldsymbol{\lambda}_m$, onde $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor contendo as incertezas da informação *a priori*.

É importante destacar que a escolha de κ e a determinação de $\hat{\sigma}_r$, assim como a construção do modelo inicial, devem ser cuidadosamente realizadas, uma vez que definirão a convergência ao mínimo global de \mathbf{J} . Por fim, a minimização é realizada através de algum algoritmo de otimização do tipo gradiente.

3.2 Inversão linear generalizada (GLI)

A técnica de inversão discutida nesta seção, refere-se ao trabalho [Cooke e Schneider \(1983\)](#). Em [Russell \(1988\)](#) ela é classificada como *model-based*, ou seja, baseia-se em um modelo para encontrar a solução do problema. Diferente da anterior, ela não estima a refletividade (não envolve deconvolução), trabalha diretamente com a impedância.

Estimam-se os parâmetros, iterativamente, a partir da perturbação do modelo inicial $\hat{\mathbf{Z}}_0$, segundo:

$$\hat{\mathbf{Z}}_k = \hat{\mathbf{Z}}_{k-1} + \mathfrak{D}_k. \quad (3.2)$$

As perturbações são calculadas pelo algoritmo de Levenberg-Marquardt ([MARQUARDT, 1963](#)) ou *Damped Least Squares*. Desta forma, expressando o traço sísmico, em função da impedância \mathbf{Z} , por $F(\mathbf{Z})$, as atualizações a cada iteração k , serão:

$$\mathfrak{D}_k = (\mathbf{S}_\partial^T \mathbf{S}_\partial + \kappa \mathbf{I})^{-1} \mathbf{S}_\partial^T [F(\mathbf{Z}) - F(\hat{\mathbf{Z}}_k)]. \quad (3.3)$$

Na definição acima, $\mathbf{S}_\partial = \frac{\partial F(\hat{\mathbf{Z}})}{\partial \hat{\mathbf{Z}}}$, é a matriz de derivadas parciais do traço em relação aos parâmetros (impedâncias) e seu cálculo numérico pode ser realizado por alguma técnica de diferenças finitas. Como padrão, \mathbf{I} é a matriz identidade. κ é um parâmetro da inversão que reflete a linearidade local da superfície de erro, como discutido em [Cooke e Schneider \(1983\)](#). É possível determiná-lo, a cada iteração, através de uma busca empírica pelo valor que minimize o erro quadrático médio entre o dado real e o sintético, alternativamente ao proposto na formulação original, [Marquardt \(1963\)](#).

Discute-se, por fim, que o modelo é parametrizado em blocos. Reduz-se assim, o número de parâmetros do modelo. Por sua vez, a parametrização introduz altas e baixas frequências, o que ajuda a contornar a não-unicidade do problema inverso, em questão.

3.3 Sumário e conclusões

O principal objetivo do presente capítulo, é introduzir a informação necessária à compreensão da análise dos dados invertidos no capítulo 5. Desta forma, foram apresentadas as duas técnicas de inversão utilizadas na análise quantitativa dos resultados da atenuação de ruídos.

Escolheu-se utilizar duas metodologias como forma de obter resultados mais significativos da inversão, evitando algum possível viés, inerente às técnicas. Além disso, em inversões acústicas pós-empilhamento, é costume adotar o método que produza os melhores resultados para a situação específica estudada. Desta forma o teste com duas técnicas garantirá que a performance da filtragem seja estudada para ao menos dois cenários reais.

Parte II

Experimentos, resultados e discussão

4 Modelos, configuração dos experimentos e discussões preliminares

Finalizada a apresentação da teoria dos métodos aqui utilizados, esta parte do trabalho tratará de discutir os experimentos e resultados obtidos, quando aplicando as técnicas anteriores em dados sísmicos.

Desta forma, este capítulo discorre sobre os dados sísmicos escolhidos, os parâmetros associados às configurações iniciais dos experimentos e a abordagem utilizada na análise, quantitativa e qualitativa, da performance dos métodos de atenuação dos ruídos. Além disso, uma breve discussão sobre as características estatísticas das sub-bandas curvelet dos sinais sísmicos estudados, é realizada.

4.1 Dados sísmicos utilizados

A fim de validar técnicas para atenuação de ruídos, é comum buscar exemplos que representem grande parte dos dados encontrados em prática. É praxe também, e não necessita justificativa, realizar os testes iniciais com dados sintéticos ou reais, que por possuírem características minuciosamente estudadas e, conseqüentemente compreendidas, funcionam como dado de controle.

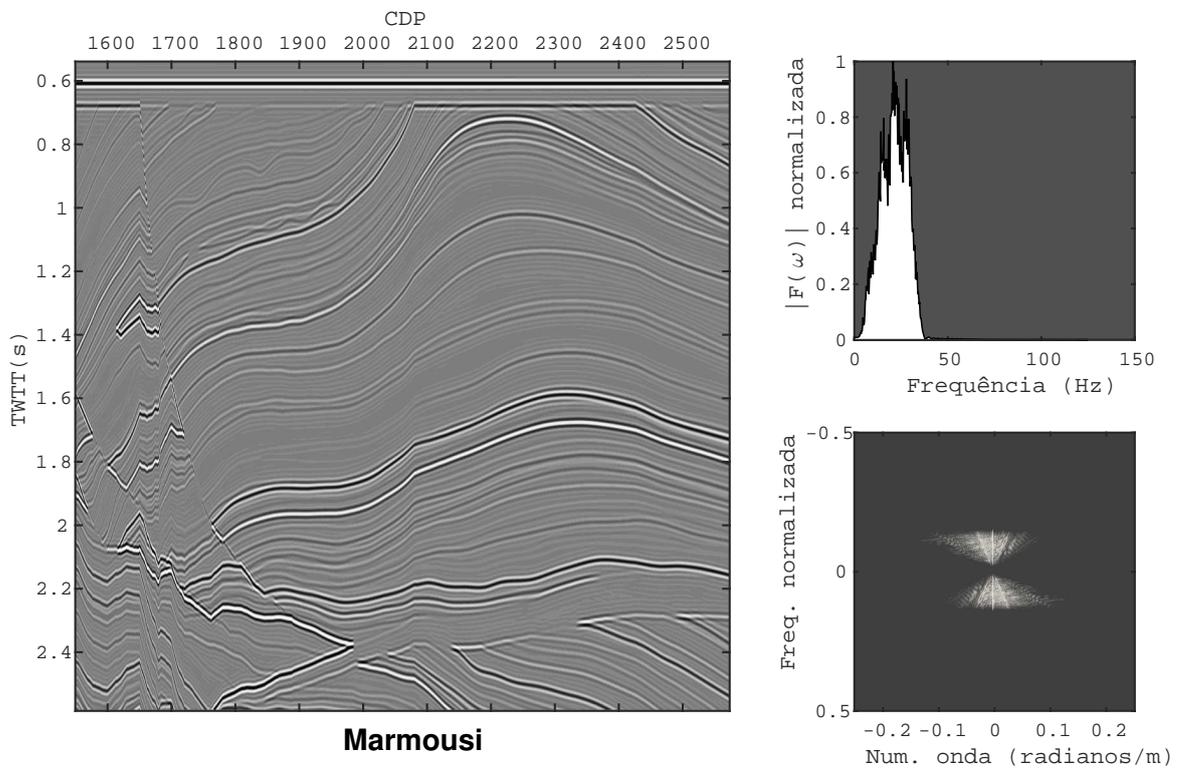
Neste trabalho, utilizam-se cinco seções sísmicas, dois dados para análise controlada (um sintético e um real) e três para validação em dados reais. Dentre os últimos, buscando representar ao máximo os tipos de seções encontradas em prática, dois são terrestres (um tipo de dado comumente associado a mais ruídos) e um marítimo. Além disso, todos são de regiões diferentes do planeta, tendo em vista que as características do sinal sísmico tem relação direta com a configuração geológica do seu local de aquisição, sendo esta, única à região estudada —ainda que o contexto de formação seja similar a outra localidade.

Os dados de controle serão referidos por: (1) Marmousi e (2) Marimba. O primeiro, é parte de uma seção sintética empilhada, em tempo, do conjunto de dados Marmousi2 (MARTIN, 2004)¹. Sua modelagem envolve traçamento de raios verticais, considerando reflexões fantasma (*ghosts*), seguido de convolução com uma wavelet Ormsby² possuindo

¹ O Marmousi2, em geral, constitui uma versão elástica do Marmousi (não confundir com a seção sísmica aqui utilizada), acústico. O último, por sua vez, foi criado pelo *Institut Français du Pétrole* (IFP) no ano de 1988, com intuito de comparar e avaliar os métodos de estimativa de velocidades, à época de um workshop realizado em 1990, durante a conferência internacional da EAGE (*European Association of Geoscientists and Engineers*) (VERSTEEG, 1994).

² Sobre Ormsby e outras funções comumente empregadas na modelagem de sinais sísmicos, cita-se Ryan (1994).

Figura 8 – Seção sísmica Marmousi, extraída de uma seção empilhada, em tempo, do Marmousi2. Também são mostrados seus espectros de amplitude e F-K.



Fonte: O autor.

banda 5 – 10 – 60 – 80Hz. Os cdps (ponto em profundidade comum, do inglês *Common-Depth Point*) estão espaçados por 6.25 metros e a amostragem vertical é de $4e - 3$ segundos. Demais especificações encontram-se na bibliografia relacionada. A figura 8 mostra a seção Marmousi, com expressiva complexidade de estruturas, principalmente na parte esquerda, e seus espectros de amplitude e F-K.

O dado Marimba, é a *inline* 70 de um cubo sísmico, parte do conjunto de dados, cedidos pela ANP (Agência Nacional do Petróleo), incluindo três poços (1RJS_0284_RJ, 4RJS_0338_RJ e 7MA_0010_RJS), relativo ao campo de petróleo Marimbá, na Bacia de Campos. Em um contexto de geologia do petróleo, este é caracterizado como um reservatório turbidítico do período Cretáceo, com rochas pertencentes à formação Carapebus³. A figura 9 ilustra a seção utilizada, assim como os espectros F-K e de amplitude. Observando-a, é possível debater sobre o porque toma-lo como dado de controle. Argumenta-se, então:

- a, visivelmente, alta razão sinal-ruído (SNR), permitindo uma fácil distinção dos eventos sísmicos, com falhas bem delineadas assim como uma clara continuidade

³ Mais informações sobre o campo de Marimbá podem ser encontradas em [Lonardelli et al. \(2017\)](#), onde é realizada uma modelagem geomecânica objetivando avaliar os efeitos oriundos da produção de petróleo, no reservatório.

lateral dos horizontes;

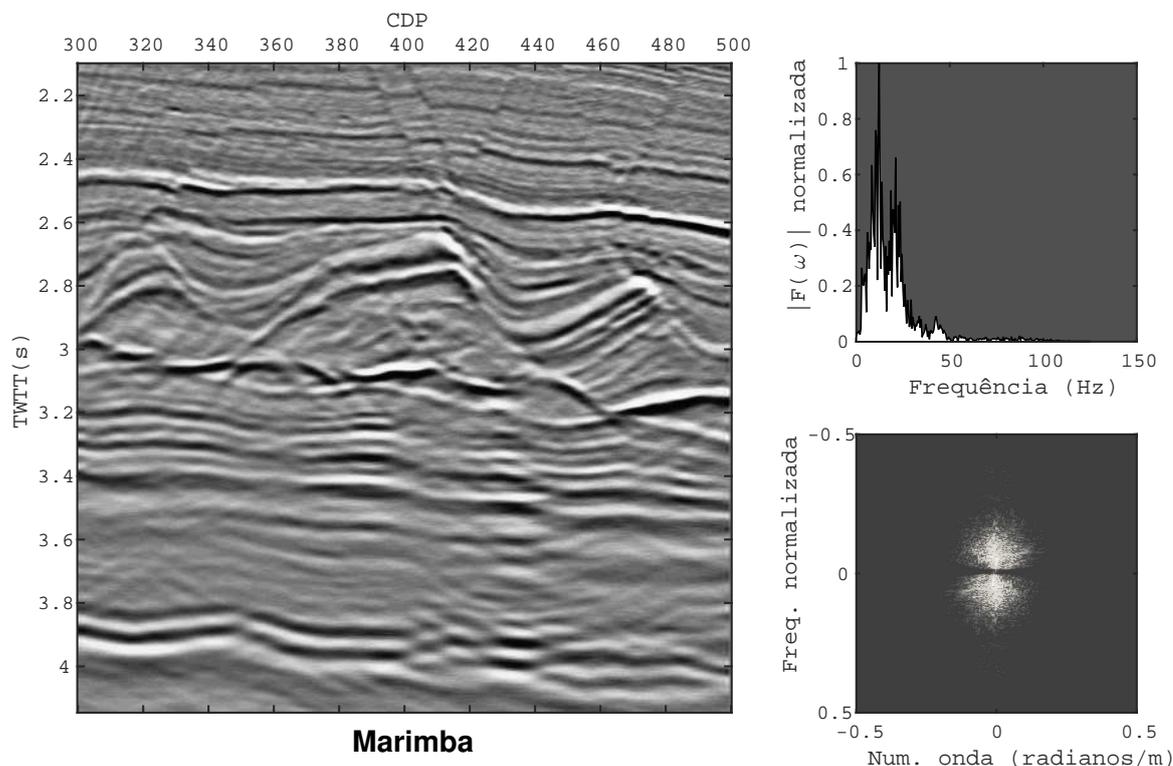
- os espectros (amplitude e F-K) serem bem comportados, possuindo uma banda bem definida, o que por sua vez é efeito direto da alta SNR, além de característica intrínseca a dados sintéticos (veja 8);
- a familiaridade do autor com o dado. Experimentos realizados em trabalhos anteriores corroboram tal analogia à dados sintéticos. Cita-se, como exemplo, [Gomes et al. \(2017\)](#), onde a análise da atenuação de ruídos para este e um sintético, produziram resultados similares, além de mostrar uma estabilidade, pouca sensibilidade, ao aumento do nível de ruído, possibilitando, assim, uma boa estimativa do sinal mesmo quando das maiores intensidades analisadas.

O Marimba possui uma taxa de amostragem temporal, de 250Hz. Seus cdps estão, originalmente, espaçados por 12.5 metros, no entanto, dentro do propósito deste trabalho, a seção foi horizontalmente sobre-amostrada para um espaçamento $12.5 \times \frac{201}{512} \approx 5$ metros.

Quanto aos dados reais, tem-se: Realland, USGSland e USGSmar. O primeiro é terrestre, adquirido na região norte do litoral fluminense, mais especificamente, próximo à Lagoa Salgada. A geologia é caracterizada por depósitos praias marinhos e/ou lagunares, de idade holocênica, sobrepostos a depósitos pleistocênicos e, conseqüentemente, ao embasamento. Uma revisão geológica detalhada pode ser encontrada em [Silva e Cunha \(2001\)](#). A seção está representada na figura 10 e, uma das características mais marcantes, é a ausência de eventos abaixo do tempo ~ 0.5 segundos, possivelmente a profundidade do embasamento. Quando analisando a geometria do dado, o espaçamento entre cdps não era o mesmo para todos, variando entre 6 e 8 metros, assim, dentro do objetivo deste trabalho, considerou-se o valor mediano: 7.28. Posteriormente este valor foi reduzido para $7.28 \times \frac{374}{512} \approx 5.3$, redimensionando o sinal para 512×512 amostras. Por fim, seguindo o padrão acima, sua taxa de amostragem é 250Hz.

A segunda seção sísmica real, USGSland, é a linha 36X-75 do arquivo de dados da Reserva Nacional de Petróleo do Alasca (NPRA), de livre acesso pelo site do Serviço Geológico dos Estados Unidos <<https://www.usgs.gov>>. Adquirida em 1975, influenciou na perfuração do poço Koluktak1, em 1981, com presença de gás e quantidades pequenas de óleo, o qual, posteriormente, foi abandonado. Informações detalhadas sobre a NPRA, assim como do programa de exploração relativo à aquisição dos dados, podem ser encontradas em [Bruynzeel, Guldenzopf e Pickard \(1982\)](#). Com objetivo de redimensionar o dado para 1024×1024 amostras, seu eixo temporal, inicialmente com período de amostragem $8e - 3$ segundos, foi interpolado para $8e - 3 \times \frac{751}{1024}$. O espaçamento entre cdps é de 25 metros. A figura 11 mostra a seção. Nesta, é possível observar a pronunciada presença de ruídos, principalmente em forma de artefatos verticais e regiões descontínuas — talvez a mais

Figura 9 – Marimba, uma seção extraída de um conjunto de dados, associado ao campo de petróleo Marimbá, na bacia de Campos. Seus espectros de frequência e F-K são mostrados na parte direita. Observa-se, que a alta resolução permite uma fácil distinção dos eventos sísmicos. Diretamente associado à resolução, também, é a banda sísmica bem definida, característica de sinais sintéticos ou com ruído reduzido de forma ótima.

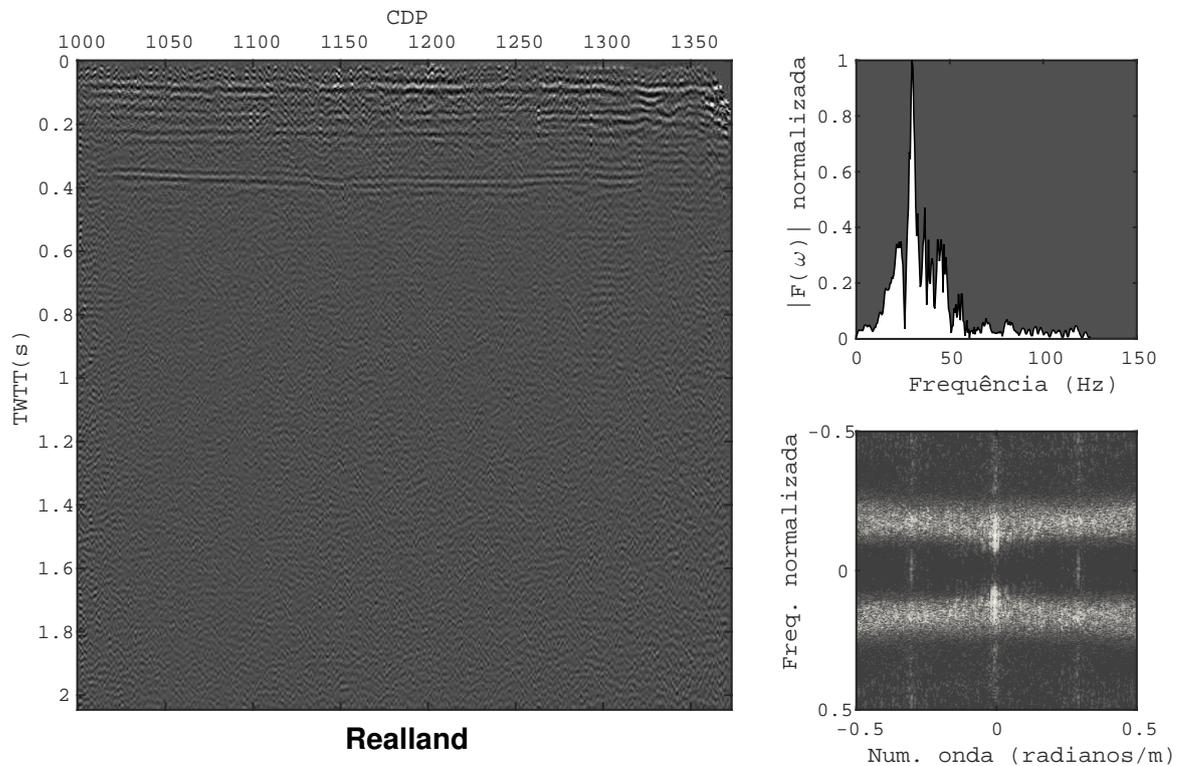


Fonte: O autor.

pronunciada sendo no canto inferior direito —, as quais, por sua vez, são responsáveis pela energia em frequências muito baixas, próximas a 0Hz.

Como última seção introduzida, a USGSmar é a maior entre todas as utilizadas. Ela corresponde à linha 25, empilhada, no tempo, do conjunto de dados sísmicos multicanal 1978-015-FA (<https://cmgds.marine.usgs.gov/fan_info.php?fan=1978-015-FA>), adquiridos em 1978, ao longo da margem continental entre a Carolina do Norte e Maine, na margem Atlântica dos Estados Unidos. Além do website acima, indica-se, para mais informações, o trabalho [Klitgord e Schneider \(1994\)](#), onde os resultados da análise de velocidades para a seção aqui tratada, é realizada. Esta seção foi reamostrada tanto horizontalmente, quanto da dimensão temporal. Na horizontal, o dado foi decimado, de forma que o espaçamento entre cdps antes, 25 metros, aumentou para: $25 \times \frac{6183}{4096} \approx 37.8$ metros, respeitando o critério de Nyquist. Na direção vertical, o número de amostras foi aumentado, de forma que o período de amostragem $4e - 3$ segundos, foi alterado para $4e - 3 \times \frac{3000}{4096}$.

Figura 10 – Seção Realland, relativa a um dado empilhado, no tempo, adquirido nas proximidades da Lagoa Salgada, no litoral norte fluminense. Eventos sísmicos são visíveis somente até ~ 0.5 segundos e, é notável a presença de ruído ao longo de toda a imagem.

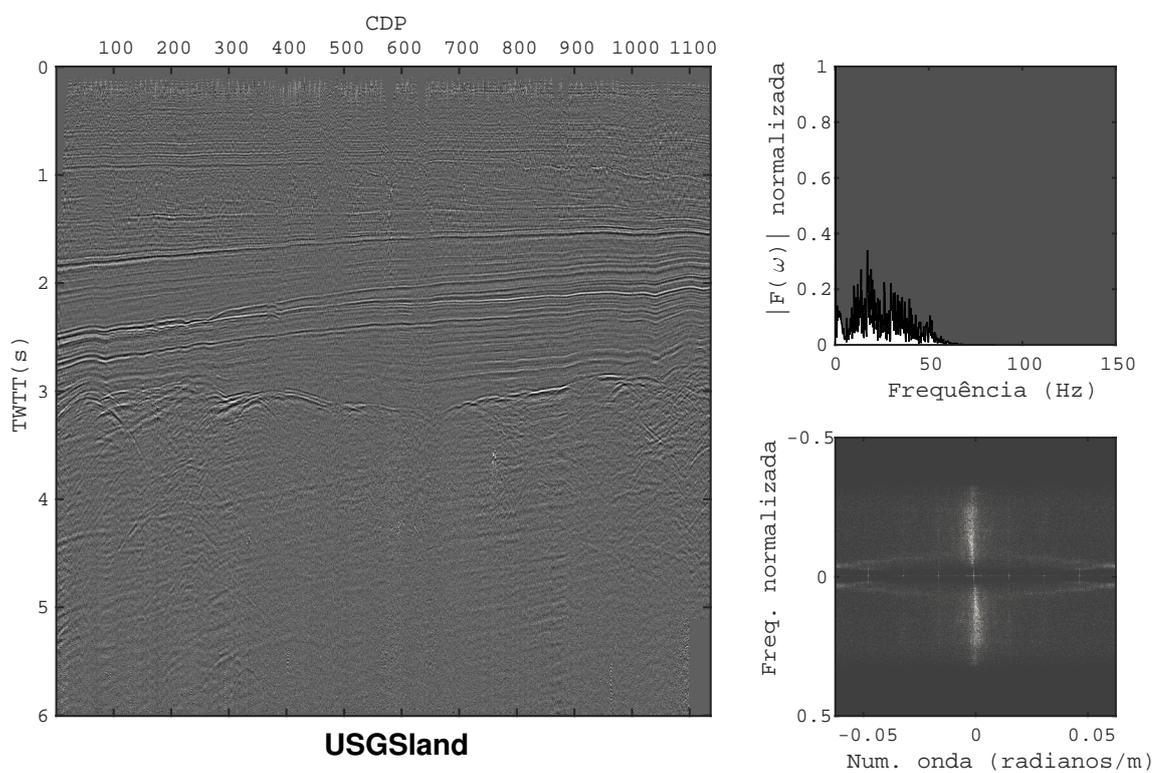


Fonte: O autor.

A figura 12 mostra USGSmar. Artefatos verticalmente orientados estão presentes ao longo de toda a seção, sendo os mais expressivos associados à locais onde o dado foi concatenado (próximo aos cdps 813, 1606 e 2908), visível pela mudança de cor (regiões mais claras e mais escuras). Além disso, como discutido para USGSland, há muita energia nas frequências próximas a 0Hz, sendo que, aqui também, é consequência das discontinuidades no dado. Pela análise do espectro traço a traço, é possível concluir, que sua maior contribuição, vem da parte superior dos conjuntos de cdps: 1-813 e 1606-2908.

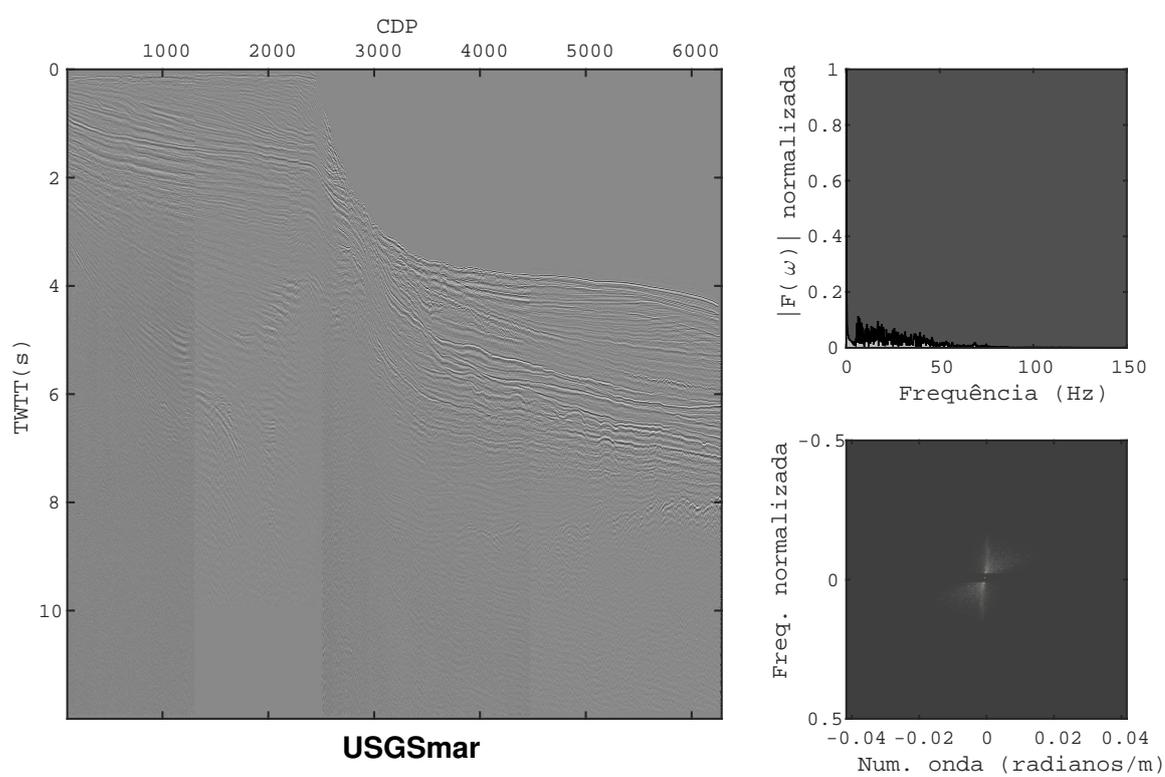
Cada seção sísmica, acima apresentada, possui uma particularidade de estruturas, ruídos e banda espectral, espera-se, ao tomá-las como objeto de análise, que sejam representativas, ao menos, de linhas sísmicas adquiridas nas mesmas regiões geográficas e/ou em ambiente geológico análogo. Finalizada a discussão sobre suas particularidades, a próxima seção discorre sobre a abordagem escolhida no julgamento dos resultados.

Figura 11 – USGSland, extraída da linha 36X-75, do arquivo de dados da Reserva Nacional de Petróleo do Alaska. A presença de ruído é marcante ao longo de todo o dado. Destacam-se os artefatos verticais na parte superior e a pronunciada descontinuidade no canto inferior direito, uma, entre as várias que contribuem para energia observada nas frequências próximas a zero.



Fonte: O autor.

Figura 12 – Seção USGSmar, correspondendo à linha, empilhada no tempo, de número 25 do conjunto de dados sísmicos multicanal 1978-015-FA. Foi adquirida em 1978, na plataforma continental do Atlântico norte, nos Estados Unidos. Também são mostrados seus espectro de amplitude e F-K.



Fonte: O autor.

4.2 Critérios para análise de performance

Após definir o problema a ser estudado, decidir sobre os testes é o próximo passo. Intrínseco ao método científico é a decisão sobre as ferramentas utilizadas para análise dos resultados. Sobre estas, é comum dividi-las em quantitativas e qualitativas. As primeiras utilizam uma abordagem matemática, medindo alguma quantidade capaz de descrever o sucesso ou falha do experimento. Por outro lado, um tratamento qualitativo pode ser visto como mais “prático”, julgando a relevância dos resultados, em função deste apresentar ou não qualidades desejáveis.

Conclusões com base quantitativa possuem menos viés, mas, contexto é fundamental quando decidindo sobre a análise. Dados sísmicos são utilizados tanto como imagens, para interpretação geológica, quanto como uma função em três, ou quatro (sísmica 4D), dimensões de um conjunto de propriedades físicas e ruído. Em consequência disto, analisar-se-á, os resultados no capítulo 5, tanto visualmente, quanto com as três medidas aqui discutidas: PSNR, diferença entre a SNR, como proposta em [Górszczyk, Adamczyk e Malinowski \(2014\)](#) e uma métrica de similaridade estrutural (SSIM).

Adicionalmente, buscando compreender a validade dos dados filtrados quando da análise quantitativa de dados sísmicos, utilizaram-se as técnicas de inversão acústica do traço discutidas em 3. Através dos modelos estimados, será possível inferir se as amplitudes do sinal recuperado ainda correspondem à geologia em subsuperfície, ou são inconsistentes.

Visualmente, são estabelecidos dois pontos (mais importantes) a se analisar: (1) facilidade na identificação de estruturas e (2) continuidade dos eventos ao longo das seções.

Quanto às medidas de eficiência, a mais simples e não menos importante, é a relação sinal-ruído de pico, PSNR (do inglês *Peak Signal-to-Noise ratio*). Bastante utilizada nas áreas de compressão e atenuação de ruídos, ela é quantificada em decibéis e necessita conhecimento do sinal original. Matematicamente, ela é função do erro quadrático médio (MSE) e do máximo valor, no sinal não alterado. Para uma seção sísmica X , com dimensão $M \times N$ (em amostras), e sua versão perturbada \tilde{X} , utilizando a definição do MSE, $\frac{1}{MN} = \sum_{m,n}^{M,N} |X_{m,n} - \tilde{X}_{m,n}|^2$, define-se a PSNR por:

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\text{Max}\{|X|\}^2}{\text{MSE}} \right) \Leftrightarrow 10 \left[\log_{10}(\text{Max}\{|X|\}^2) - \log_{10}(\text{MSE}) \right]; \quad (4.1)$$

com $\text{Max}\{|X|\}^2$ referindo-se ao quadrado da maior amplitude do sinal.

Tem-se então, de 4.1, que a PSNR mede, em decibéis, o quão maior o valor de mais alta energia é, em relação à energia da perturbação. Portanto, indica a influência que a alteração do sinal causou nos valores originais.

Outra grandeza, já padrão a todas as áreas que lidam com sinais, é a variação da razão sinal-ruído, SNR (do inglês *signal-to-noise ratio*). É, comumente, definida como o

quadrado da razão entre as amplitudes RMS⁴ do sinal não corrompido e do ruído. Buscando contornar a necessidade de conhecimento *a priori* do sinal e ruídos, Górszczyk, Adamczyk e Malinowski (2014), supondo ruído sem correlação com o dado e que seções sísmicas são correlacionadas traço-a-traço, utiliza medidas de correlação para calcular SNR. Desta forma, considerando a seção sísmica anterior, \tilde{X}_i , com i indicando seus traços [1 N-1], a autocorrelação do sinal sísmico em cada traço, \mathcal{A}_{S_i} , pode ser obtida pela média das correlações cruzadas entre traços adjacentes, $\mathcal{C}_{X_i, X_{i+1}}$ e $\mathcal{C}_{X_{i+1}, X_i}$: $\mathcal{A}_{S_i} = \frac{1}{2} (\mathcal{C}_{X_i, X_{i+1}} + \mathcal{C}_{X_{i+1}, X_i})$.

As autocorrelações para o ruído em cada traço \mathcal{A}_{N_i} , por sua vez, são obtidas pela média entre os resíduos: $\mathcal{A}_{S_i} - \mathcal{A}_{X_i}$ e $\mathcal{A}_{S_i} - \mathcal{A}_{X_{i+1}}$.

A autocorrelação de um sinal possui seu valor máximo para a posição (*lag*) 0, onde é igual à soma do quadrado dos valores no sinal. Da definição da SNR, acima, tem-se então, para cada traço:

$$SNR_i = \left(\frac{\sqrt{\text{Max}\{\mathcal{A}_{S_i}\}}}{\sqrt{\text{Max}\{\mathcal{A}_{N_i}\}}} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{\text{Max}\{\mathcal{A}_{S_i}\}}{\text{Max}\{\mathcal{A}_{N_i}\}}. \quad (4.2)$$

Por fim, calcula-se a SNR final, como a média entre as obtidas para os N-1 pares de traços:

$$SNR = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} SNR_i. \quad (4.3)$$

Aparentemente uma forma eficiente, sua premissa de correlação lateral pode falhar em áreas geologicamente complexas, apresentando muitas discontinuidades laterais, como falhamentos e domos salinos quase-verticais. Além disso, em dados reais, o ruído com banda limitada presente, pode aumentar a SNR, uma vez que é correlacionado.

Uma forma eficiente de avaliar, tanto quantitativa quanto qualitativamente, as alterações causadas por filtrar determinada imagem, é utilizar de medidas adaptadas, também, ao sistema de visão humana. A métrica de similaridade estrutural (SSIM - *Structural SIMilarity*) apresentada em Wang et al. (2004), assumindo que o sistema de percepção visual humano é adaptado principalmente à informação estrutural de cenas, compara padrões de intensidade nos pixels contidos em uma região específica, normalizados para a luminância e o contraste locais⁵.

Seguindo Ventosa, Rabeson e Duval (2011), onde mapas de similaridade gerados pela SSIM são utilizados na avaliação da atenuação de ruídos coerentes em seções sísmicas—principalmente o rolamento superficial—, aqui essa métrica auxiliará no julgamento da performance dos métodos de filtragem. Tomando dois sinais, X e Y , sua similaridade é

⁴ RMS aqui, refere-se à raiz do valor quadrático médio: $\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2}$.

⁵ Da teoria moderna sobre percepção de cores, a luminância em sistemas de percepção visual, é relativa à informação sobre claro/escuro. É possível considerá-la, basicamente, como a soma das componentes R (vermelho) e G (verde) (VELHO; FRERY; GOMES, 2014).

definida em função da comparação entre suas: luminâncias $l(X, Y)$, contrastes $c(X, Y)$ e estruturas $s(X, Y)$:

$$\text{SSIM}(X, Y) = f(l(X, Y), c(X, Y), s(X, Y)). \quad (4.4)$$

As três componentes são, relativamente, independentes e SSIM satisfaz as seguintes condições:

- (1) simetria: $\text{SSIM}(X, Y) = \text{SSIM}(Y, X)$;
- (2) possui um limite superior: $\text{SSIM}(X, Y) \leq 1$;
- (3) possui um único máximo: $\text{SSIM}(X, Y) = 1$ se, e somente se $X_i = Y_i \quad \forall i \in [1 N]$.

Em 4.4, a função $l(X, Y)$, que compara as luminâncias, está relacionada às intensidades médias de cada sinal (μ_X e μ_Y) pela equação:

$$l(X, Y) = \frac{2\mu_X\mu_Y + D_1}{\mu_X^2 + \mu_Y^2 + D_1}; \quad (4.5)$$

onde a constante D_1 , é adicionada como precaução a instabilidades numéricas. Esta, por sua vez, é comumente definida por: $D_1 = (K_1H)^2$; onde H é a faixa dinâmica⁶ de valores no dado analisado.

Em uma relação similar à 4.5, a variação dos contrastes depende do desvio padrão das intensidades no sinal. Define-se por:

$$c(X, Y) = \frac{2\sigma_X\sigma_Y + D_2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + D_2}; \quad (4.6)$$

para $D_2 = (K_2H)^2$.

O último termo, associado à comparação entre estruturas, $s(X, Y)$, é igual à correlação cruzada entre X e Y ($\mathcal{C}_{X,Y}$) devidamente corrigida para eventuais instabilidades. $\mathcal{C}_{X,Y}$ é definida como a razão entre a covariância e o produto das variâncias individuais:

$$\mathcal{C}_{X,Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X\sigma_Y} \Leftrightarrow \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Segue então, que:

$$s(X, Y) = \frac{\sigma_{XY} + D_3}{\sigma_X\sigma_Y + D_3}, \quad (4.7)$$

onde $D_3 = D_2/2$, ainda que possa ser definida como as constantes anteriores.

Resta tratar sobre a função $f(\cdot)$, responsável por relacionar os três termos acima. Esta, será considerada como o produto de cada contribuição elevada a uma potência p_i específica. Assim:

$$\text{SSIM}(X, Y) = [l(X, Y)]^{p_1} [c(X, Y)]^{p_2} [s(X, Y)]^{p_3}. \quad (4.8)$$

⁶ Este termo refere-se a *Dynamical Range*, utilizado na área de processamento de imagens, para referir-se à gama de intensidades da imagem.

Os parâmetros K_1 e K_2 devem ser definidos por valores muito pequenos. Como no trabalho original Wang et al. (2004), eles são escolhido arbitrariamente, uma vez que não foi identificada influência à métrica SSIM final. Considera-os então, como: $K_1 = 0.01$ e $K_2 = 0.03$. Quanto aos expoentes em 4.8, é claro, da equação, que eles controlam a importância de cada fator. O mais comum é fazê-los iguais a 1, ou seja, admitir um mesmo peso às componentes.

Ressalta-se, que as equações acima, são aplicadas em uma vizinhança de cada amostra do sinal, com tamanho pré-determinado. Intuitivamente, supõe-se o uso de janelas quadradas, com dimensões constantes e deslizando sobre o dado, de forma que, a cada valor, estará associada uma região quadrada. No entanto, esta escolha pode produzir efeito de pixelização (regiões com variações abruptas de intensidade, com geometria retangular) em partes do sinal. Desta forma, adotam-se janelas Gaussianas para suavização local das vizinhanças, quando do cálculo das médias, variâncias e covariâncias utilizadas.

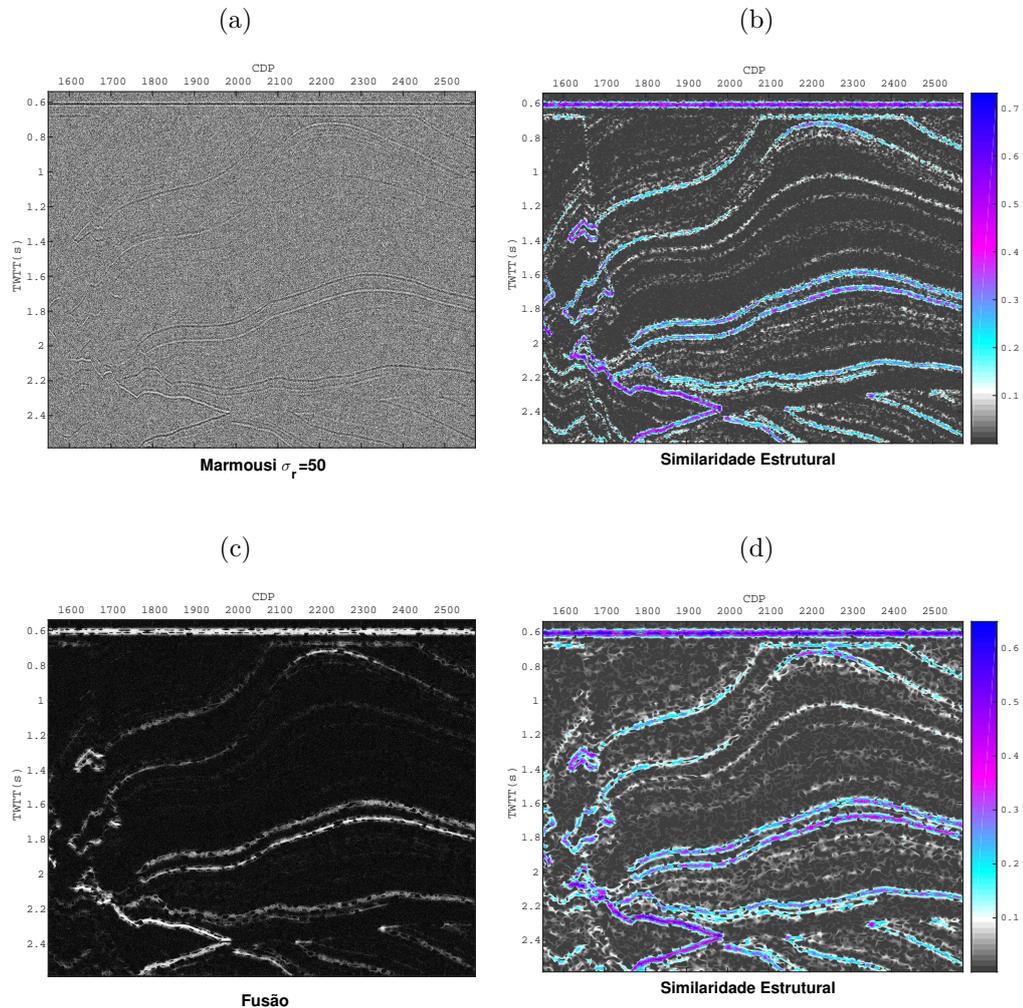
Para o Marmousi (8) contaminado com ruído AWGN $\sigma_r = 50$ (valor representando a porcentagem do valor de maior amplitude no sinal, como explicado na próxima seção), a figura 13 mostra sua similaridade estrutural (13b e 13d) com relação ao Marmousi não corrompido. A fusão da imagens 13a e 13b, pelo canal alpha⁷, é mostrada na imagem 13c, atuando como um atributo capaz de marcar os eventos com energia suficiente, em relação ao ruído, para uma distinção visual. Observando os dois mapas de similaridade 13b e 13d, o primeiro possui uma melhor resolução, ainda que, ambos tenham sido gerados em relação às mesmas seções sísmicas. Sua diferença está no tamanho da janela utilizada no cálculo da SSIM. 13b utilizou janelas 13×13 amostras, 13d 25×25 . O trabalho original sugere utilizar janelas 11×11 , aqui optou-se por 13×13 .

Tomando como base a SSIM original, diversas métricas foram desenvolvidas sob critério de similaridade estrutural. Em Wang, Simoncelli e Bovik (2003), é apresentada uma versão multi-escala MS-SSIM, onde a métrica SSIM é calculada a cada escala de resolução. Wang e Simoncelli (2005) introduzem CW-SSIM, versão no domínio wavelet complexo, uma medida estável a variações de luminância, contraste e deslocamento no espaço. Zujovic, Pappas e Neuhoff (2013) aponta que a comparação ponto-a-ponto da SSIM, é incapaz de distinguir texturas em imagens. Propõe então, métricas embasadas na comparação entre medidas de correlação espacial intra-banda, considerando uma análise multi-resolução das imagens.

Em trabalho mais recente, Long, Wang e AlRegib (2015) indaga sobre a necessidade de métricas da similaridade estrutural, específicas a dados sísmicos. Desenvolve então, a Similaridade Sísmica (*Seismic Similarity* - SeiSIM) pela combinação da métrica de

⁷ Combinação de imagens mais conhecida pelo seu termo em inglês: *alpha blending*. Tanto sua versão espacial quanto no domínio da Transformada discreta de Cosseno são discutidas em Shen, Sethi e Bhaskaran (1998). Sendo uma técnica padrão em processamento de imagens e a fim de restringir o trabalho somente ao imprescindível, não será aqui tratada.

Figura 13 – Aplicação da métrica SSIM no Marmousi corrompido por ruído AWGN (a). A única diferença entre (b) e (d) é o tamanho da janela utilizada para cálculo das estatísticas utilizadas em SSIM. (c) Mostra a fusão de (a) e (b) pelo canal alpha, destacando os eventos visualmente expressivos em (a), considerando o Marmousi não corrompido.



similaridade textural STSIM-1, de [Zujovic, Pappas e Neuhoff \(2013\)](#), e a similaridade geológica. A última, por sua vez, é calculada em função das correlações horizontais e verticais, na imagem resultante da utilização do atributo *semblance*, apresentado [Marfurt et al. \(1998\)](#).

Por fim, discute-se que um indicador de similaridade estrutural semelhante ao SeiSIM, mas construído para as sub-bandas curvelet, seria o ideal para este trabalho. De fato, em [Alaudah e AlRegib \(2015\)](#), um indicador satisfazendo tal condição é apresentado, ainda assim, há espaço para melhorias em trabalhos futuros.

Discutidos os critérios para avaliação dos resultados, a próxima seção abordará a questão da configuração dos experimentos e parâmetros associados.

4.3 Parâmetros e configuração dos testes

Discutir-se-á, na presente seção, a estrutura dos experimentos realizados, base à análise do capítulo de resultados, 5.

Construir um experimento, com dados sintéticos, cuja finalidade seja avaliar a performance à atenuação de ruídos, envolve, inicialmente, a escolha do modelo e níveis de perturbação. Em consequências dos tipos de ruído aqui analisados e da premissa de modelo aditivo, citada no capítulo 2 — como já discutido— o mesmo foi escolhido.

Quanto às características dos ruídos, utilizou-se tanto ruído branco, com distribuição Gaussiana, quanto correlacionável. O nível do primeiro foi determinado como uma porcentagem do valor de maior magnitude no sinal. Optou-se pelos níveis (σ_r): 5, 10, 20, 30 e 50. Por sua vez, os correlacionáveis, foram obtidos ao limitar as bandas espectrais dos ruídos brancos. Para tal, dois filtros foram construídos, tomando como base os espectros das seções Marmousi (8) e Marimba (9): um passa-baixa para frequências em [0 20] hertz e um passa-alta para valores maiores que 30 hertz. Além disto, em função da redução na energia dos ruídos pela limitação da banda, as energias finais foram normalizadas para o valor do respectivo ruído branco.

A figura 14, mostra para Marmousi o domínio F-K considerando ruídos com $\sigma_r = 20$ e 50. Observou-se que, após a normalização da energia dos ruídos correlacionáveis, o desvio padrão dos mesmos, tende a ser um pouco maior que para o ruído branco, como indicado pela figura.

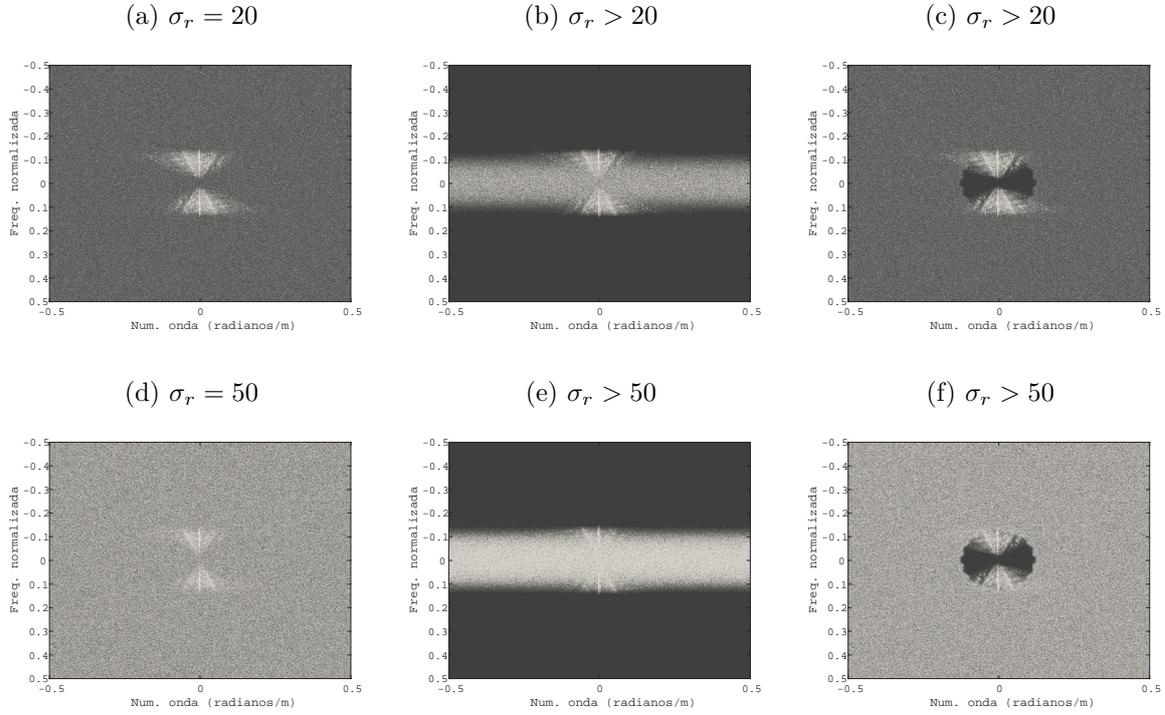
Em toda discussão tratando metodologias para atenuação de ruídos, é comum e necessário especificar sobre como distinguem-se ruído e sinal. Para métodos que analisam os coeficientes do sinal em um domínio transformado, como os aqui discutidos, é comum trabalhar com o nível de corte (ou níveis), um valor capaz de descrever o limite entre as energias individuais destas componentes.

Para transformações com bases ortogonais e ruído AWGN, Donoho e Johnstone (1994) e Mallat (1999) (truncamento por oráculo⁸) discutem que, um valor ideal, capaz de assegurar o menor erro quadrático médio para o limiar de corte, quando do truncamento abrupto, é o desvio padrão do ruído. $t = \sigma_r$, neste sentido, seria o limitante entre ruído e sinal. No entanto, a utilização deste valor ótimo é inviável dentro do propósito de filtragem com a CT. Primeiro, a não-ortogonalidade das suas funções base, como anteriormente discutido, transforma o ruído AWGN, em colorido. Além disso, em situações práticas, não se possui informação sobre o dado sem perturbação, premissa ao truncamento por oráculo. E, para o caso do *ProbShrinkCurv*, emprega-se truncamento suave, não abrupto.

Ainda assim, Mallat (1999, cap. 11) mostra que para frames compactos, o trun-

⁸ Do inglês *oracle*, é comumente referido por *oracle thresholding*. Implica situações ideais, quando se conhece o sinal não-corrrompido.

Figura 14 – Plano F-K da seção Marmousi com ruído: branco (primeira coluna), de banda limitada a $[0\ 20]$ Hz (segunda coluna) e com espectro para frequências maiores que 30 Hz (terceira coluna). A energia do ruído é a mesma para todas as imagens. O desvio padrão, por outro lado, apresenta pequena variação.



Fonte: O autor.

camento por oráculo continua válido, contanto que a redundância seja devidamente considerada. Conseqüentemente, a estimativa do desvio padrão do ruído, dependerá das funções curvelet em cada sub-banda. De fato, a estimativa de σ_r , como aqui realizada, discutida na seção 2.3, considera esta dependência. Entende-se, portanto, que o valor ótimo para τ estará próximo à σ_r (σ_r'), não igual.

Pode-se considerar, então, uma busca empírica por este valor ideal (ou, o que produza melhores resultados dentro de um conjunto de valores), para cada dado, o que por outro lado implica um alto custo computacional. Ou, é possível definir o melhor limiar a um conjunto específico de dados e, subsequentemente, estendê-lo para os demais (como feito no artigo original Tessens et al. (2008)). Tal abordagem, por sua vez, resulta em um valor, possivelmente, enviesado. Entretanto, sendo intrínseca ao *ProbShrinkCurv*, —como originalmente apresentado— esta última foi objeto de análise, quando dos testes deste método específico.

O nível de corte adotado pelo primeiro método discutido, são valores empiricamente definidos nos trabalhos Starck, Donoho e Candès (2001) e Starck, Candès e Donoho (2002), para o tratamento de imagens. A metodologia de filtragem, nestes empregada, é intitulada *ksigma* e, assim também será referida no presente trabalho. Especificamente, $c = 3$ na

seção 2.1, de forma que o limiar de corte γ será 4 para a escala de maior detalhe e 3 para as demais, exceto a primeira, como discutido na seção citada. Posteriormente os valores são alterados de forma empírica, buscando o ótimo para cada sub-banda de orientação em cada escala.

Tomando como base o *AdaptShrink* no trabalho Chang, Yu e Vetterli (2000b) (e com menor contribuição do *BayesShrink* em Chang, Yu e Vetterli (2000a)), para o primeiro método, outra forma de determinar \mathbf{t} , é proposta. O objetivo, é utilizar limiares de corte que considerem informação sobre a distribuição local dos coeficientes de cada sub-banda, uma vez que, os procedimentos anteriores estipulam um valor espacialmente uniforme.

Define-se, então, o limiar de corte em cada sub-banda i , de dimensões $M \times N$, como:

$$\mathbf{t}_i = \sigma_r^2 / \sigma_{\mathbf{c}_i(\mathbf{v})}; \quad (4.9)$$

onde \mathbf{v} representa o conjunto de $2L+1$ ($L = \text{Max}\{50, 0.01(M \cdot N)\}$) coeficientes, agrupados em função da sua similaridade de contexto espacial (\mathbf{z}).

Para cada coeficiente \mathbf{c}_i , \mathbf{z} é obtido como a média das magnitudes dos coeficientes, contidos na vizinhança anteriormente especificada para o IIB LSAI, equação 2.16. Quanto aos intra-banda, consideram-se $n = 5$ coeficientes, orientados em direção paralela à das curvelets na sub-banda.

Obtém-se, por fim, a estimativa do desvio padrão associado a cada coeficiente em i , por:

$$\hat{\sigma}_{\mathbf{c}_i(\mathbf{v})} = \sqrt{\left[\text{Max}\left\{ \left(\frac{1}{2L+1} \sum_{\mathbf{v}} \mathbf{c}_i^2 \right) - \sigma_r^2, 0 \right\} \right]}. \quad (4.10)$$

A adaptação para o primeiro método, conseqüentemente, constitui uma versão do *AdaptShrink* no domínio da CT, sendo portanto, uma técnica de truncamento suave. Entitula-se aqui, como *AdaptShrinkCurv*. Até certo ponto, este, possui metodologia similar ao *local adaptive shrinkage* (LAS) em Cunha, Zhou e Do (2006), o qual utiliza a Contourlet. No entanto, a presente regra de truncamento, é mais eficiente em considerar o contexto espacial local, uma vez que o LAS não considera, explicitamente, dependências intra- e/ou entre-bandas.

Discutidos os níveis de ruído para modelagem sintética e a determinação dos limites de corte para cada método, a próxima seção finaliza este capítulo, com uma análise estatística das sub-bandas curvelet. Estudam-se similaridades/diferenças entre seções sísmicas e imagens naturais, finalizando a discussão iniciada no capítulo anterior.

4.4 Validação dos modelos marginais para coeficientes curvelet de dados sísmicos

Ao final do capítulo anterior, foi introduzida a questão do tratamento análogo a imagens naturais, que dados sísmicos recebem, quando envolve atenuação de ruídos. Buscando finalizar a discussão, esta seção avalia o modelo de distribuição Laplaciana generalizada 2.4, para os coeficientes em cada sub-banda curvelet, de dados sísmicos. Entende-se que validar este *prior* equivale a comprovar (empiricamente) a similaridade dos dois tipos de dados em questão, quando da transformação curvelet.

Particularmente, para imagens naturais, os trabalhos Boubchir e Fadili (2005) e Alecu et al. (2006), foram fundamentais em traduzir as ideias de Simoncelli e Adelson (1996) —por sua vez, baseado em resultados de trabalhos anteriores, como Woods e O’Neil (1986) e Mallat (1989)— quanto à transformada Wavelet, para a CT. Estes propõem uma distribuição marginal do tipo Laplaciana generalizada, para descrever os coeficientes curvelet em cada sub-banda, de imagens naturais.

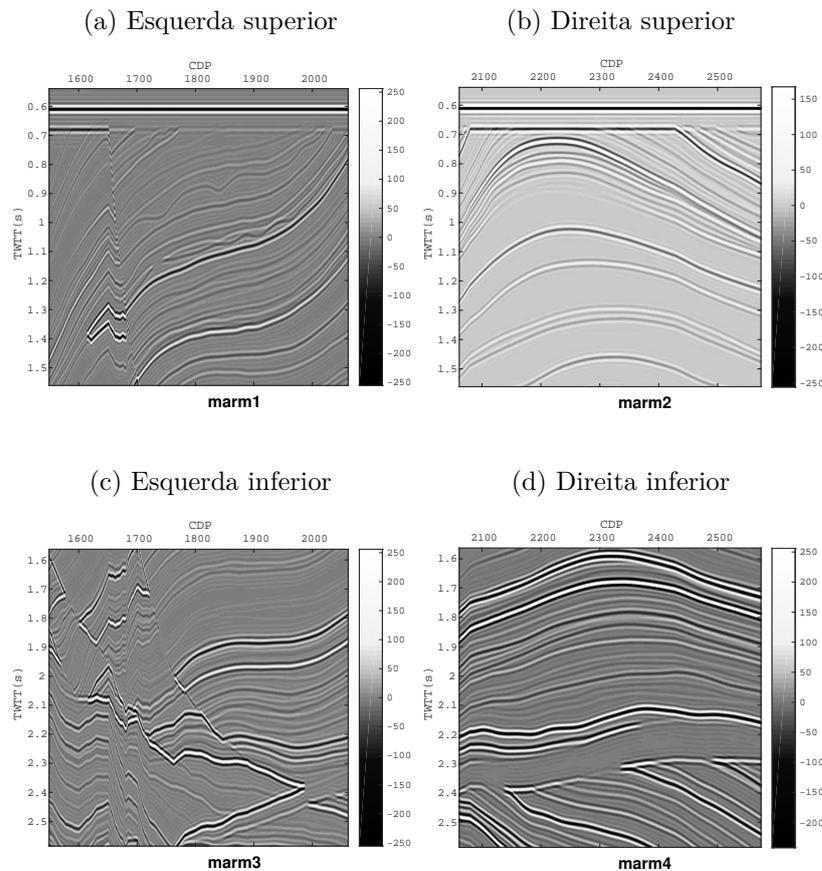
Em trabalho mais recente, Boubchir, Nait-Ali e Petit (2010) propõe outra distribuição marginal, capaz de caracterizar as dependências intra- e entre-bandas dos coeficientes curvelet. Apesar do seu sucesso, seu potencial é equivalente à Laplaciana generalizada. A última, por sua vez, foi adotada como padrão no tratamento de imagens naturais, visto o grande número de aplicações utilizando-a.

Dado o sucesso deste modelo, sua competência em representar dados sísmicos é estudada, sob abordagem semelhante a Alecu et al. (2006). A análise utiliza as seções Marmousi (8) e Marimba (9), aqui particionadas em quatro, de mesmas dimensões. A intenção é validar o modelo marginal para um maior número de seções sísmicas. Tal procedimento, é justificado pelo fato de cada região (principalmente no Marmousi) possuir peculiaridades geológicas suficientes, para entendê-las como representativas de regiões com contextos geológicos distintos.

As figuras 15 e 16 ilustram as seções particionadas, dispostas relativamente à sua posição espacial no dado original. Observando-as, fica claro a diferença entre as regiões acima citada. Destaca-se a seção marm2 15b, onde as amplitudes do sinal tem menor variação (veja escala de cores).

Inicialmente, transformaram-se as seções para o domínio curvelet. A decomposição, envolveu 6 escalas e 16 bandas de orientação para a de menor resolução. Obtiveram-se, por fim, 208 sub-bandas de detalhe (não é considerada a banda central, passa-baixa, do espectro) para cada imagem sísmica. Subsequentemente, calculou-se a curtose e, numericamente, o modelo marginal foi ajustado a cada uma das 1664 bandas, obtendo-se, por fim, os parâmetros de forma ν e escala λ .

Figura 15 – Divisão do Marmousi em quatro partes de mesma dimensão.



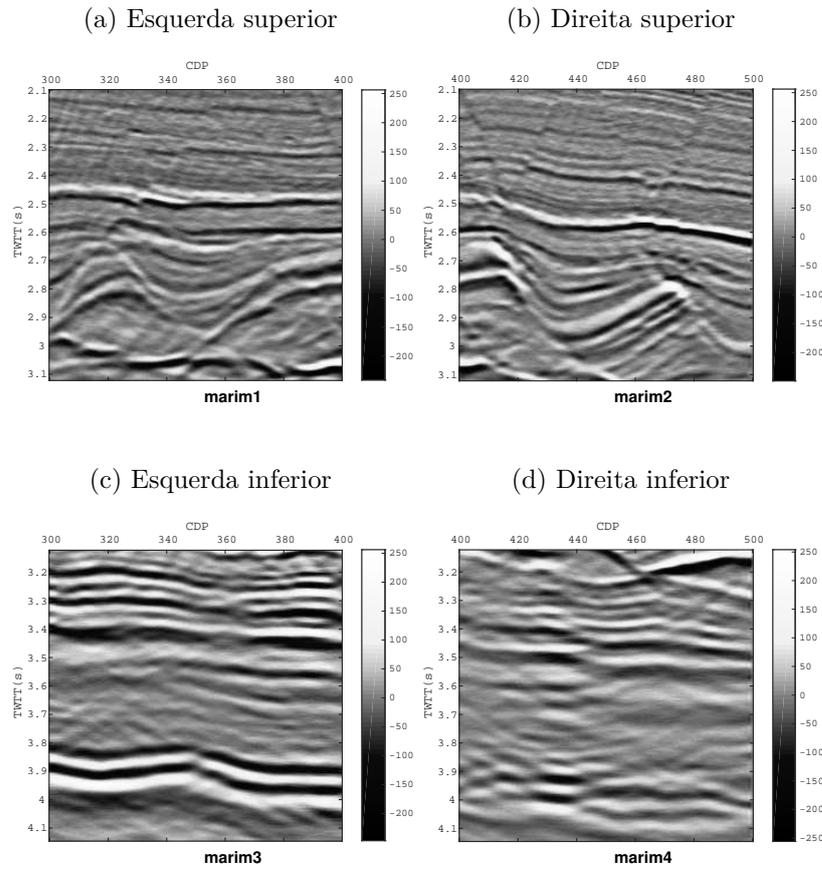
Fonte: O autor.

A tabela 1 sumariza os resultados obtidos para cada dado. Considerando-se as 208 sub-bandas de cada imagem, são mostrados os valores mínimo, máximo, médio e mediano da curtose e do parâmetro de forma. Em geral, as curtoses são maiores e os ν menores, que os valores esperados para distribuição normal ($\kappa_{UR\tilde{c}_i} = 3$ e $\nu = 2$). As exceções acontecem para as seções do Marimba, mostradas na segunda metade da tabela. No entanto, entre as 832 bandas, somente 13 ($\approx 1.56\%$) fugiram do padrão. Tal comportamento é, de certa forma, previsível, visto que o mesmo não é um sinal ideal, mas sim real, aqui tratado como de controle.

Figuras 17, 18, 19 e 20, mostram as distribuições ajustadas (linhas em preto) para sub-bandas, aleatoriamente escolhidas, das seções marm2, marm3, marim1 e marim4. A qualidade do ajuste, é quantificada utilizando a razão entre a divergência de Kullback-Leibler (ou entropia relativa) e a entropia.

A primeira, introduzida em Kullback e Leibler (1951), é comumente utilizada na área de teoria da informação, como métrica da divergência entre uma distribuição observada e a esperada. Quantifica, assim, quanto de informação é perdida, ao utilizar o modelo de distribuição desejado. Considerando duas distribuições, p e q , e a variável

Figura 16 – Partição do Marimba em seções de tamanhos iguais.



Fonte: O autor.

aleatória x , a métrica tratada é definida por:

$$D_{KL}(p||q) = - \sum_i^N p(x_i)(\log q(x_i) - \log p(x_i)) \Leftrightarrow -E[\log q(x_i) - \log p(x_i)]. \quad (4.11)$$

Entende-se, então, como o valor esperado para a diferença logarítmica entre as distribuições consideradas.

Entropia (ou entropia da informação, como formulado em [Shannon \(1948\)](#)), é uma medida da quantidade média de informação criada por um processo estocástico. Define-se, matematicamente, por:

$$E(p) = - \sum_i^N p(x_i) \log p(x_i); \quad (4.12)$$

ou seja, a contribuição em termos de informação, de um evento x_i , é tão maior quanto menor sua probabilidade de ocorrer. O conceito de informação, por sua vez, segue as ideias apresentadas por Shannon no trabalho acima citado.

Conseqüentemente, a razão entre as duas métricas é uma forma de quantificar a porcentagem de informação perdida ao substituir a distribuição real (o histograma dos valores observados), pela fdp ajustada (o modelo). A análise das figuras mostra que a maior

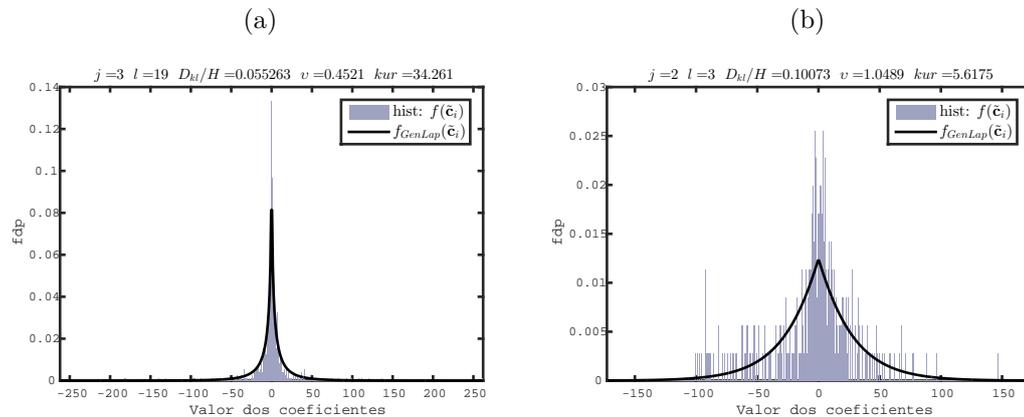
Tabela 1 – Análise das distribuições estatísticas marginais, para as sub-bandas curvelet das seções sísmicas aqui tratadas. Mostram-se os valores mínimo, máximo, médio e mediano, da curtose e do parâmetro de forma estimado, calculados para cada seção sísmica.

Seção	Curtose ($\kappa_{ur\tilde{c}_i}$)				Parâmetro de forma (v)			
	Min.	Máx.	Média	Mediana	Min.	Máx.	Média	Mediana
marm1	5.5897	2971.4	330.1084	49.8355	0.1893	1.0528	0.4117	0.4047
marm2	5.6175	1151.2	158.9673	68.1293	0.2159	1.0489	0.4009	0.3722
marm3	3.4779	1827.4	184.8764	33.0311	0.2020	1.6409	0.4975	0.4573
marm4	4.4314	631.5	116.1539	59.7602	0.2370	1.2745	0.4271	0.3852
marim1	2.2392	291.8	27.8269	7.0526	0.2711	3.7080	0.9712	0.8979
marim2	2.3922	287.2	29.0577	6.6105	0.2720	3.0816	0.9421	0.9362
marim3	2.4173	170.6	27.4364	11.1037	0.3013	3.0035	0.8329	0.6988
marim4	2.4626	239.8	24.9540	9.8987	0.2814	2.8748	0.8764	0.7405

Fonte – O autor

Nota – É importante destacar que tanto na tabela, quanto ao longo de todo o trabalho, adota-se o ponto “.” como separador decimal, diferente à convenção brasileira da vírgula “,”.

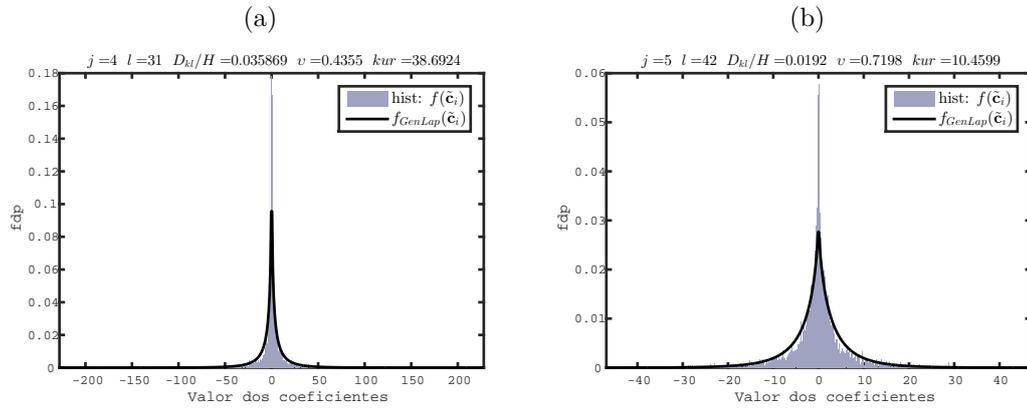
Figura 17 – marm2



Fonte: O autor.

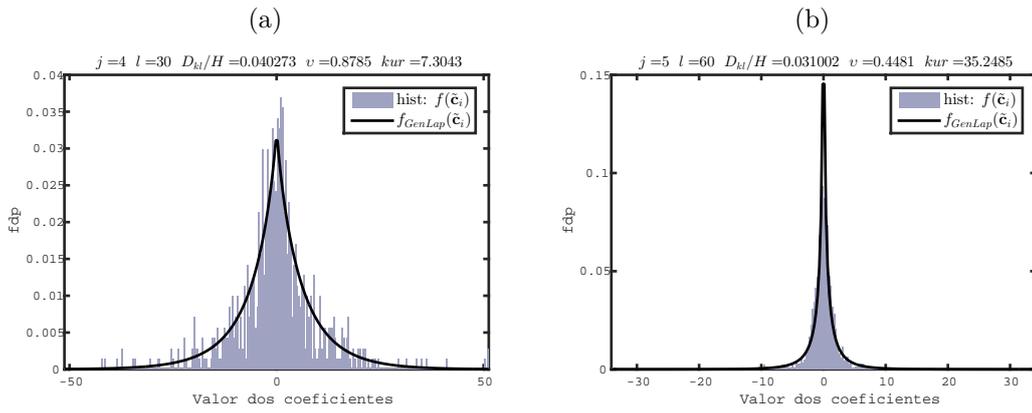
perda acontece em 20b, sendo, no entanto, relativamente baixa ($\approx 11.25\%$ da informação nos coeficientes). De fato, pelo observado de todos os ajustes, a razão $D_{KL}(p||q)/E(p)$ para todas as sub-bandas, produziu valores baixos, confirmando que o modelo marginal considerado, é válido, também, para dados sísmicos.

Figura 18 – marm3



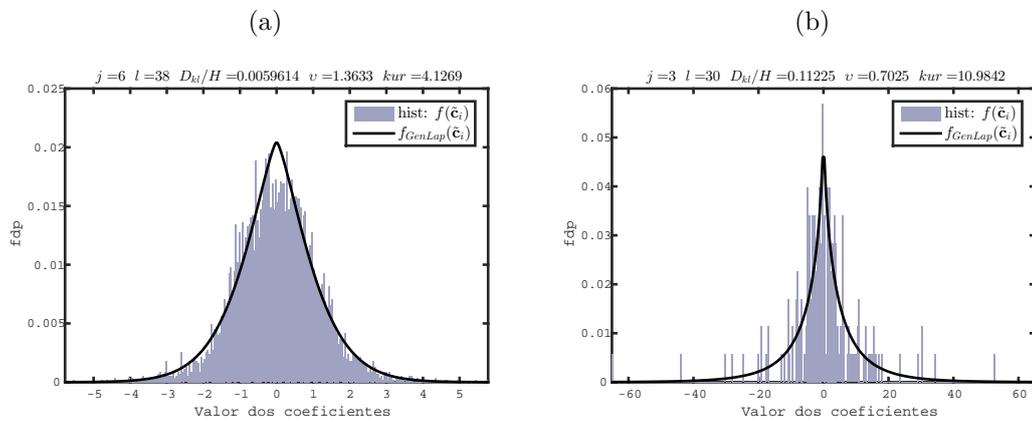
Fonte: O autor.

Figura 19 – marim1



Fonte: O autor.

Figura 20 – marim4



Fonte: O autor.

4.5 Sumário de conclusões

Como premissa à compreensão dos resultados apresentados no próximo capítulo, este tratou da descrição dos experimentos e parâmetros associados, modelos utilizados, métricas para avaliação da performance e, por fim, uma discussão validando a utilização de métodos criados para imagens naturais, em dados sísmicos.

A seção 4.4, em especial, é importante no sentido que confirma, empiricamente, que o mesmo modelo marginal utilizado para sub-bandas curvelet de imagens naturais, pode ser aplicado a imagens sísmicas. Justifica-se, então, a adaptação dos diversos métodos, de atenuação de ruídos, cujo *prior* é a Generalizada Laplaciana, para dados sísmicos.

Finalizadas as discussões necessárias, o próximo capítulo apresentará, na íntegra, todos os resultados produzidos neste trabalho.

5 Apresentação dos resultados

O presente capítulo, objetiva a apresentação dos resultados mais significativos, oriundos dos experimentos realizados. Inicialmente discutem-se os resultados relativos à experimentação com dados controlados. Posteriormente, utilizando do conhecimento obtido com os testes sintéticos, tratam-se as aplicações aos dados reais.

A filtragem do ruído foi, primeiro, analisada para a imagem sísmica completa. Em seguida, buscando melhores resultados, estudou-se o caso em que a filtragem é realizada em partições do dado (figuras 15 e 16), individualmente. Da observação de artefatos direcionais residuais, refinaram-se os melhores resultados através do truncamento manual em sub-bandas, com base no espectro F-K. Por fim, inverterm-se dois traços de cada dado, buscando avaliar a capacidade das metodologias de atenuação de ruídos, em recuperar as amplitudes do sinal sísmico.

Antes de entrar na discussão dos resultados de fato, uma colocação importante é necessária. A razão sinal-ruído (SNR) como proposta por [Górszczyk, Adamczyk e Malinowski \(2014\)](#) (equações 4.2 e 4.3), é inválida para o propósito de quantificar performance de métodos de remoção de ruídos. Em [de Franco \(2014\)](#), inconsistência em seus resultados foram reportados como justificativa para sua rejeição. Argumenta-se aqui, que sendo uma medida da correlação traço a traço de uma imagem sísmica, seus valores aumentarão com o nível de corte para o truncamento no domínio curvelet. Quanto maior o corte, maior o número de objetos removidos, mais aparente ficam os eventos sísmicos significativos (com amplitude relativamente elevada). No entanto, eventos sísmicos tem continuidade lateral inerente, assim, mesmo que grande parte do sinal seja eliminado, a SNR irá aumentar até que o último refletor (o de maior amplitude e continuidade) seja removido. Evita-se, assim, tal métrica de performance e aconselha-se não empregá-la para finalidades similares à deste trabalho.

5.1 Experimentos com dados controlados

Esta seção trata da análise com o dado sintético Marmousi (8) e o controlado Marimba (9).

A remoção de ruídos, para as duas abordagens, inicialmente utiliza vários limiares de corte. Quanto às partições, elas são reagrupas após filtragem e a média de suas PSNRs consideradas na comparação com os resultados das seções não particionadas. Por fim, os melhores resultados são selecionados para um refinamento relativo aos artefatos direcionais.

Na tabela 2 abaixo, são mostrados os valores PSNR das imagens sísmicas corrom-

pidas por ruído. Eles são verdadeiros para todos os testes realizados nesta seção.

Tabela 2 – Valores PSNR das seções corrompidas por ruído. As linhas referem-se aos níveis de ruído σ_r e as colunas ao tipo: branco, passa-baixa e passa-alta (como discutido na seção 4.3).

Nível σ_r	Marmousi			Marimba		
	Branco	Baixa	Alta	Branco	Baixa	Alta
5	26.0181	25.9678	26.2538	26.0362	26.0438	25.5892
10	19.9875	20.0404	19.6737	19.9970	20.0743	19.6502
20	13.9778	13.5064	14.1879	13.9768	13.5202	13.4388
30	10.4587	10.5200	10.9679	10.4626	10.1630	9.6548
50	6.0249	5.5691	6.4358	6.0036	6.0313	5.7459

Fonte – O autor

Para sumarizar os resultados, nas sub-seções abaixo, optou-se pela utilização de gráficos, ao invés de tabelas. Tal escolha baseia-se no fato de imagens serem mais agradáveis à interpretação humana, além de ocupar espaço menor.

5.1.1 Abordagem 1

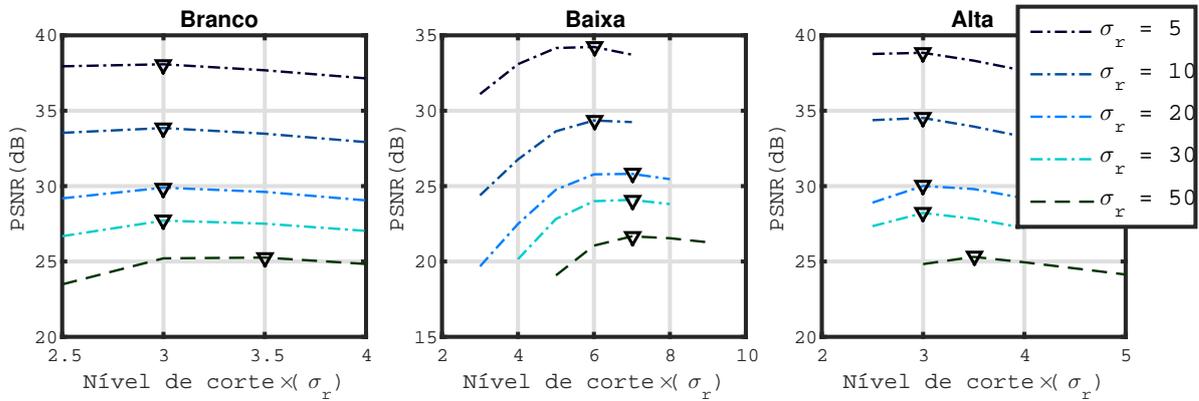
Como já mencionado, entende-se como abordagem 1, as metodologias: *ksigma* e *AdaptShrinkCurv*. Para as seções completas, o resultado dos testes com vários limiares de corte são mostrados nas figuras 21, 22, 31 e 32. Às partições dos dados, por sua vez, associam-se as figuras 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35 e 36, relativas ao Marmousi, e 27, 28, 29, 26, 37, 38, 39 e 40 ao Marimba.

Em todos os testes, o ruído de baixa, é o que leva aos piores resultados. Também é o que tem maior sensibilidade à escolha do nível de corte, com maiores PSNRs para valores t , relativamente mais elevados que os outros dois tipos de ruído. Em especial, para a metodologia *ksigma*, tende a ser o dobro do limiar utilizado quando do ruído branco e de alta.

Considerando ruídos branco e de alta para *ksigma*, como em Starck, Candès e Donoho (2002), a escolha de $c = 3$ garantirá um valor PSNR alto. Os melhores exemplos são as seções marm4 e marim3, como mostrado nas figuras 26 e 29. Estas, por sua vez, são imagens possuindo objetos com direções preferencialmente horizontais e consequentemente associadas a regiões com menor complexidade geológica. Desta forma, é esperado que a menor complexidade de estruturas permita mais fácil distinção entre sinal e ruído.

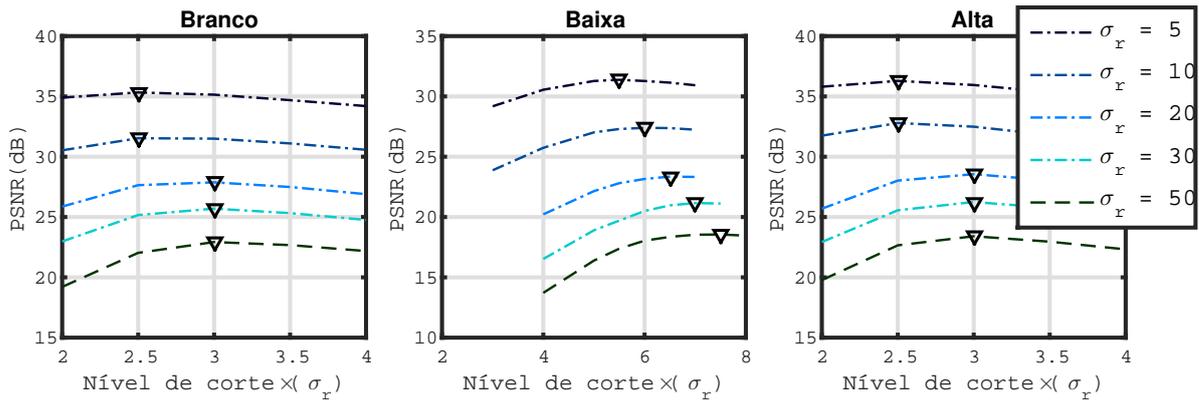
Para a metodologia *AdaptShrinkCurv* os resultados são mais estáveis à variação do nível de corte, sugerindo que esta é capaz de melhor separação entre ruído e sinal. Considerando ruídos branco e de alta, os maiores valores PSNR são obtidos para limiares, em geral, inferiores à metade dos necessários ao utilizar *ksigma*. Quando dos ruídos de

Figura 21 – Variação do limiar de corte para a filtragem do Marmousi completo pela metodologia *ksigma*.



Fonte: O autor.

Figura 22 – Variação do limiar de corte para a filtragem do Marimba completo pela metodologia *ksigma*.



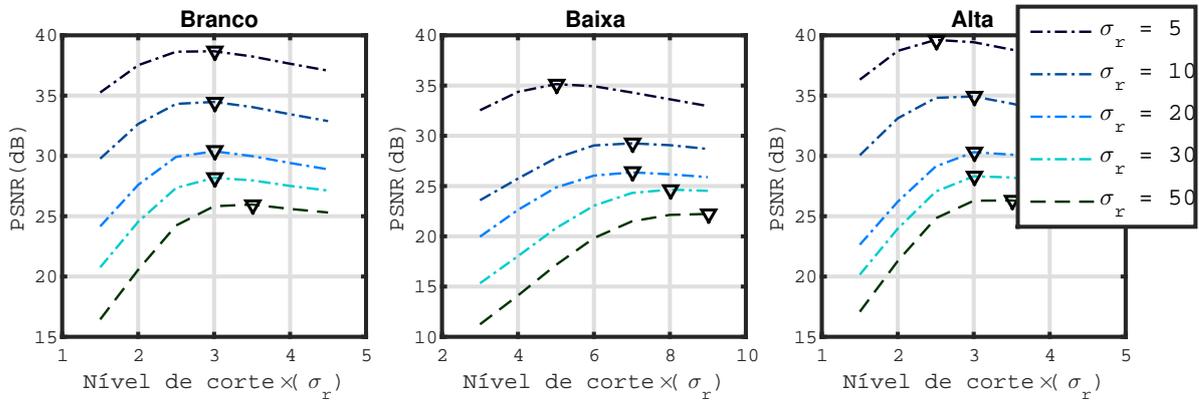
Fonte: O autor.

baixa, por outro lado, é difícil estabelecer uma tendência, de forma que os melhores valores de corte encontrados, estão no domínio $c \in (4 \ 9]$, similar aos valores encontrados para *ksigma*.

As figuras 41, 42 e 43, mostram o efeito de variar c para *ksigma*. Elas referem-se aos resultados mostrados em 21 para ruído de baixa, com $\sigma_r = 10$, e os cortes $c = 3$, 6 e 7, respectivamente. Na primeira, fica claro que determinar um limiar inferior ao ótimo produz uma imagem com muitos artefatos e ruído residual. O melhor resultado, em relação à PSNR, obtido, é mostrado na segunda. A última é um exemplo de t , relativamente maior que o valor ótimo, mostrando que parte do sinal começa a, também, ser atenuado (destaque à parte superior esquerda).

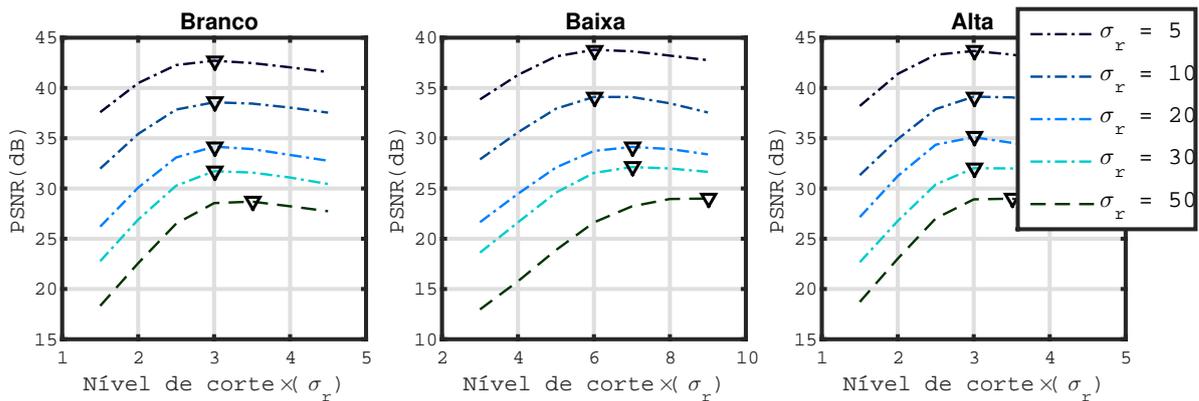
Para Marmousi e Marimba, as figuras 44, 46, 48, 50, 52 e 54, mostram suas equivalentes, respectivamente corrompidas por ruído gaussiano com desvio padrão $\sigma_r = 20$,

Figura 23 – Resultados da filtragem do marm1 pela metodologia *ksigma*, em função do limiar de corte.



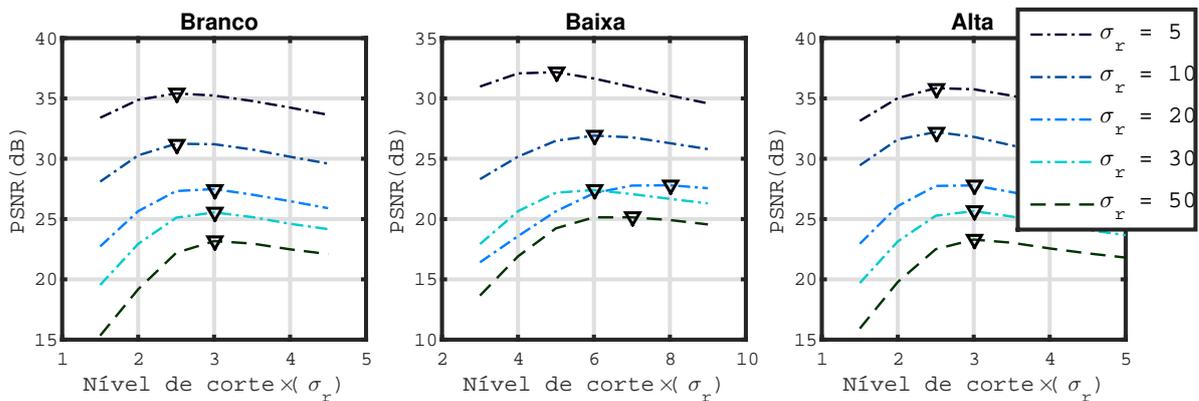
Fonte: O autor.

Figura 24 – Resultados da filtragem do marm2 pela metodologia *ksigma*, em função do limiar de corte.



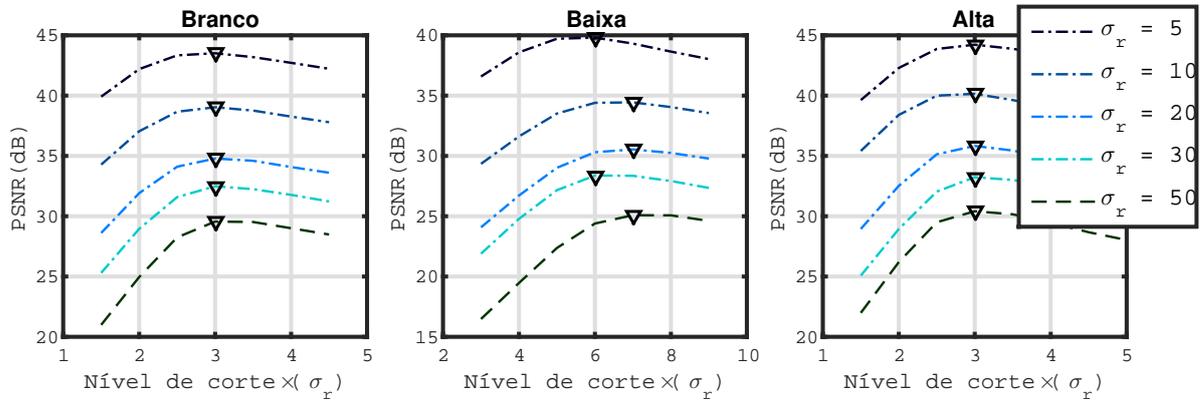
Fonte: O autor.

Figura 25 – Resultados da filtragem do marm3 pela metodologia *ksigma*, em função do limiar de corte.



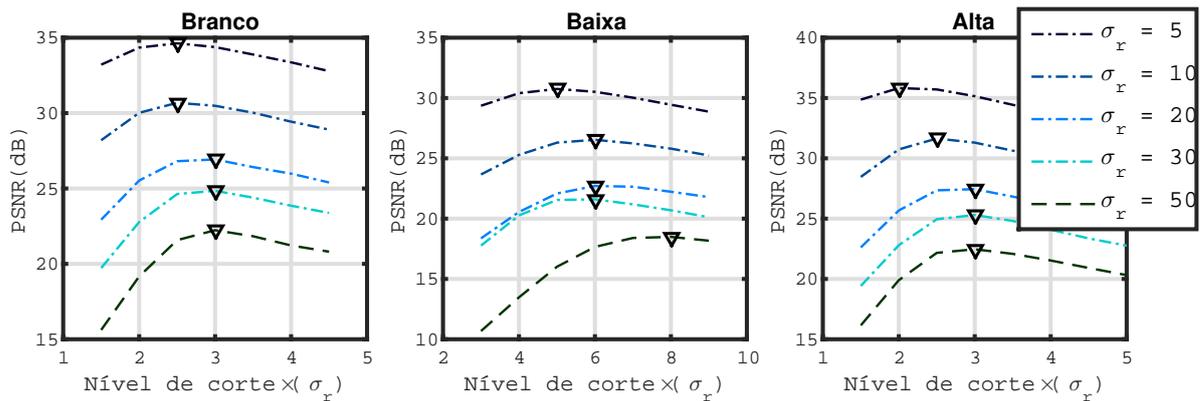
Fonte: O autor.

Figura 26 – Resultados da filtragem do marm4 pela metodologia *ksigma*, em função do limiar de corte.



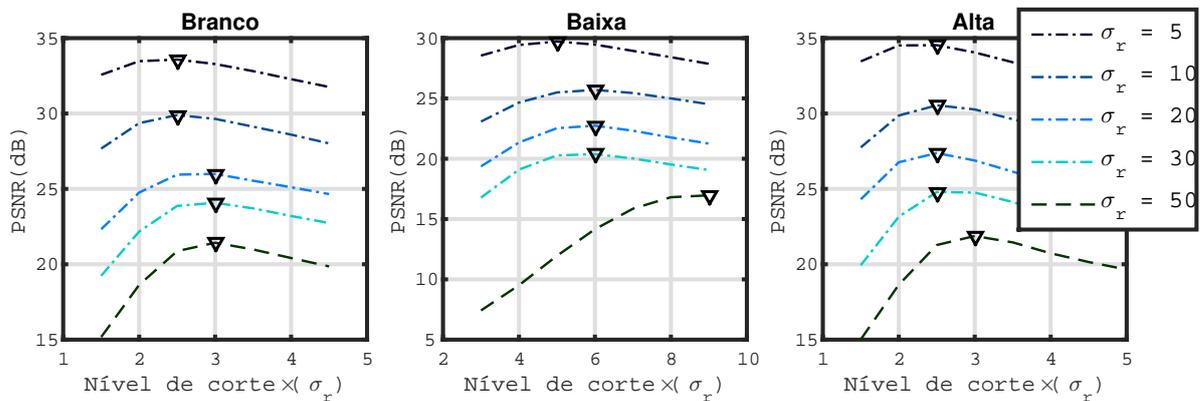
Fonte: O autor.

Figura 27 – Resultados da filtragem do marim1 pela metodologia *ksigma*, em função do limiar de corte.



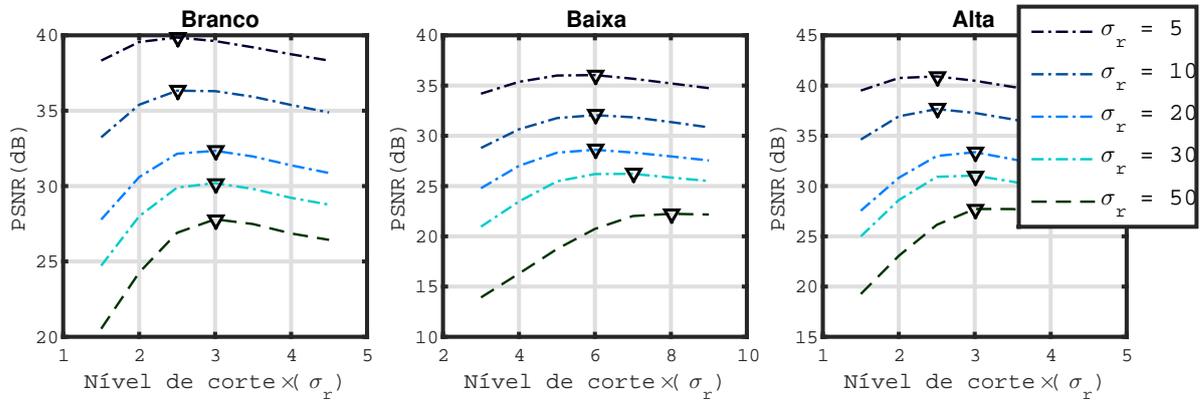
Fonte: O autor.

Figura 28 – Resultados da filtragem do marim2 pela metodologia *ksigma*, em função do limiar de corte.



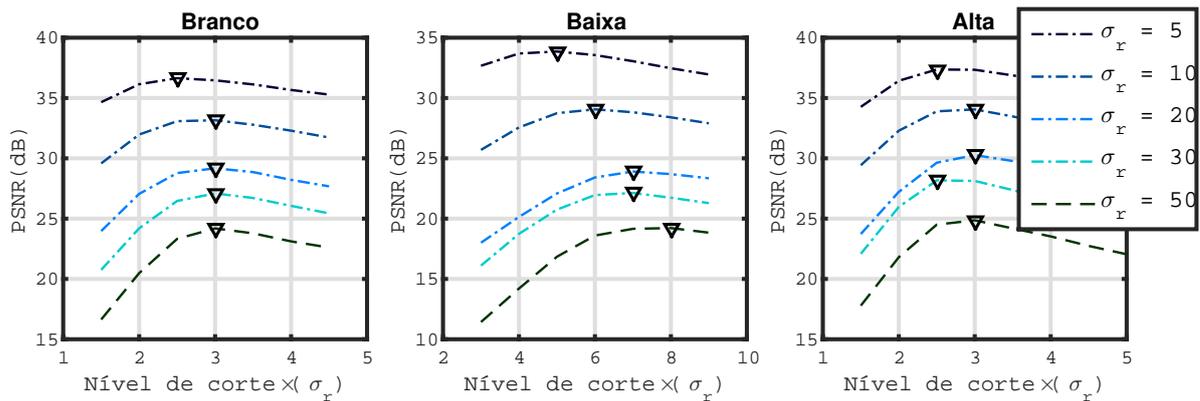
Fonte: O autor.

Figura 29 – Resultados da filtragem do marim3 pela metodologia *ksigma*, em função do limiar de corte.



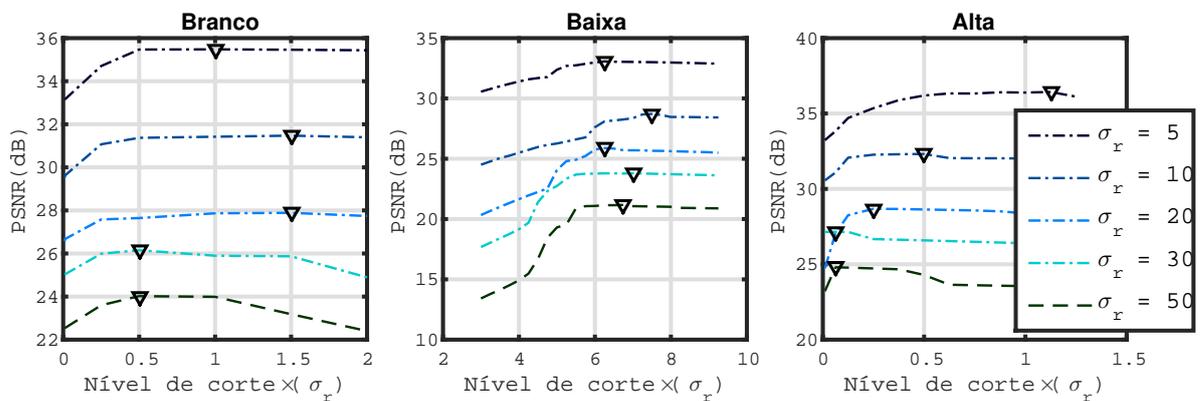
Fonte: O autor.

Figura 30 – Resultados da filtragem do marim4 pela metodologia *ksigma*, em função do limiar de corte.



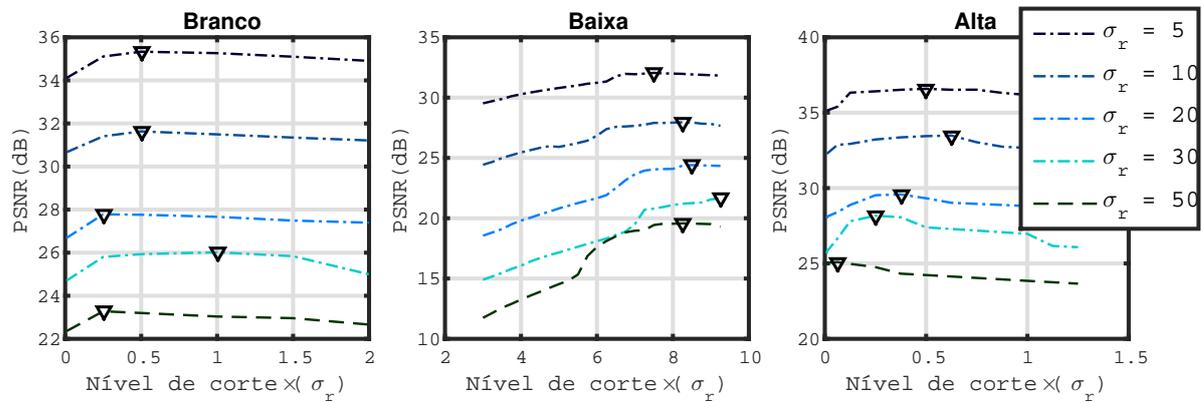
Fonte: O autor.

Figura 31 – Variação do limiar de corte para a filtragem do Marmousi completo pela metodologia *AdaptShrinkCurv*.



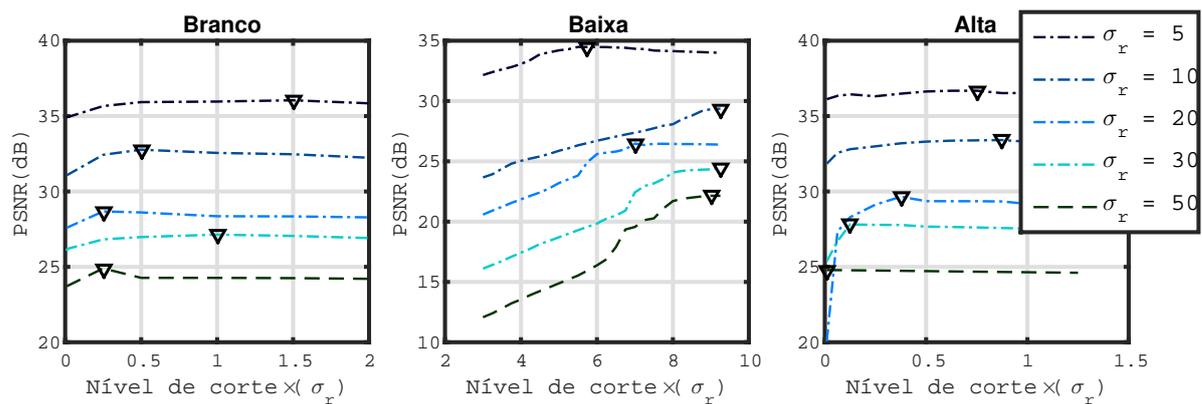
Fonte: O autor.

Figura 32 – Variação do limiar de corte para a filtragem do Marimba completo pela metodologia *AdaptShrinkCurv*.



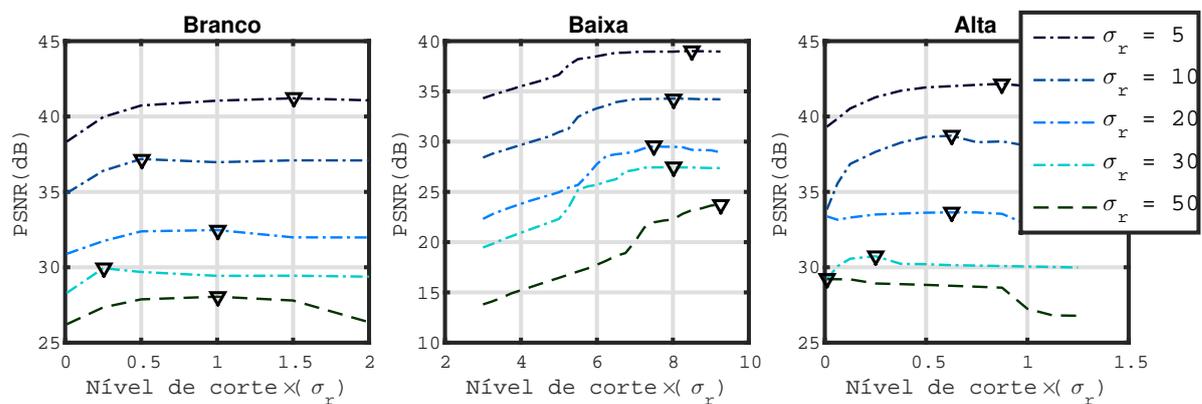
Fonte: O autor.

Figura 33 – Resultados da filtragem do marm1 pela metodologia *AdaptShrinkCurv*, em função do limiar de corte.



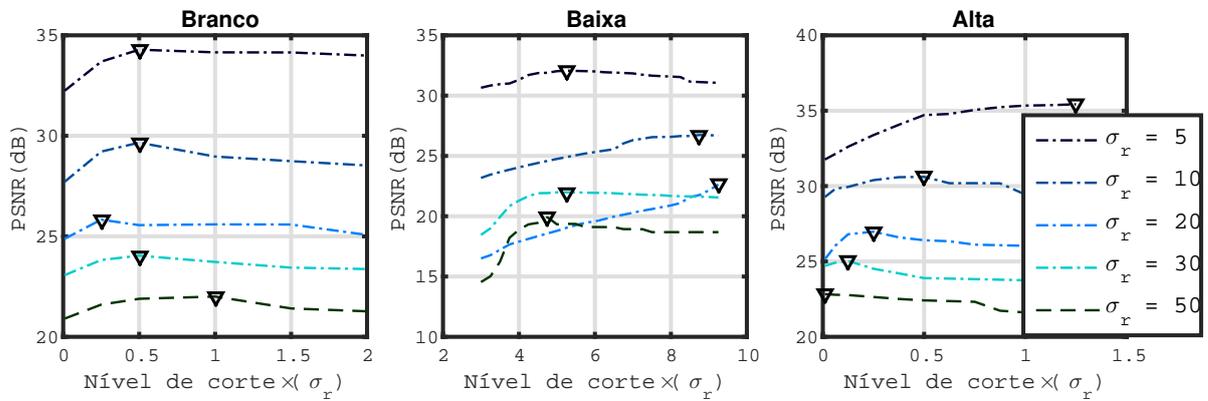
Fonte: O autor.

Figura 34 – Resultados da filtragem do marm2 pela metodologia *AdaptShrinkCurv*, em função do limiar de corte.



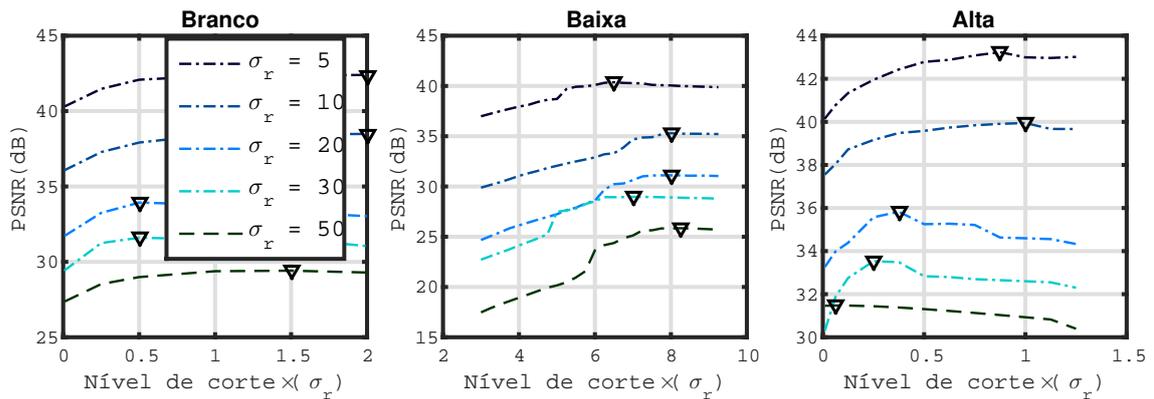
Fonte: O autor.

Figura 35 – Resultados da filtragem do marm3 pela metodologia *AdaptShrinkCurv*, em função do limiar de corte.



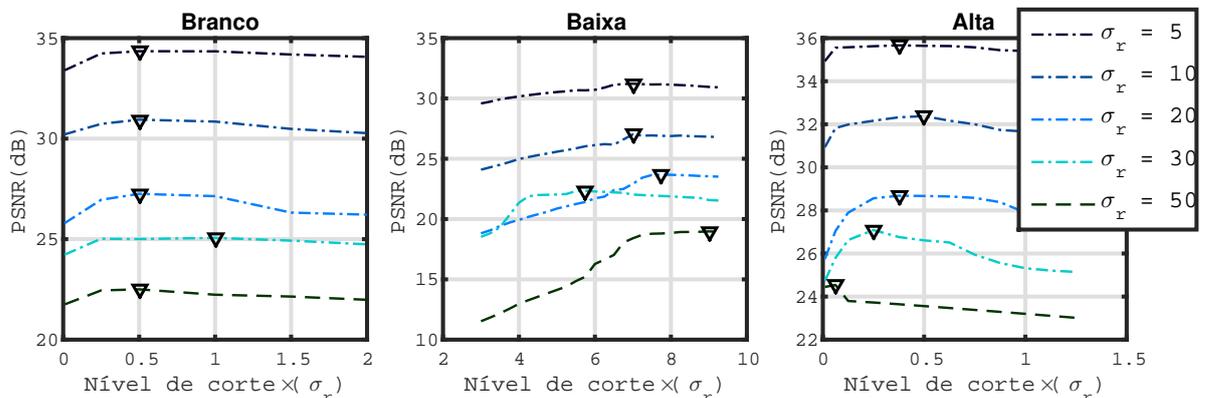
Fonte: O autor.

Figura 36 – Resultados da filtragem do marm4 pela metodologia *AdaptShrinkCurv*, em função do limiar de corte.



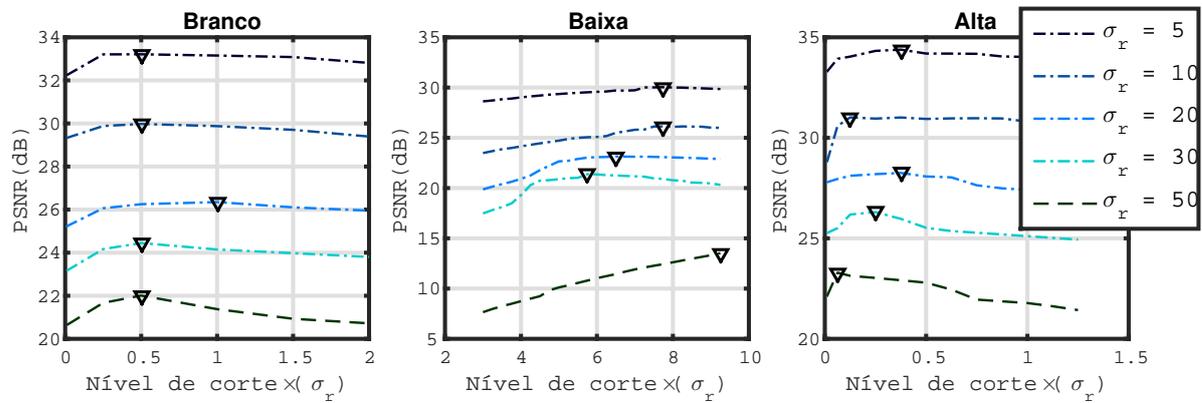
Fonte: O autor.

Figura 37 – Resultados da filtragem do marim1 pela metodologia *AdaptShrinkCurv*, em função do limiar de corte.



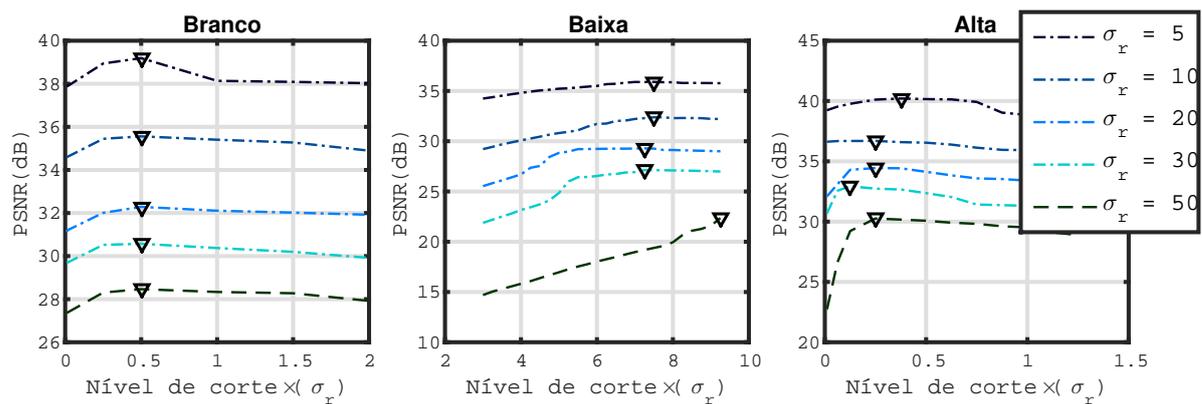
Fonte: O autor.

Figura 38 – Resultados da filtragem do marim2 pela metodologia *AdaptShrinkCurv*, em função do limiar de corte.



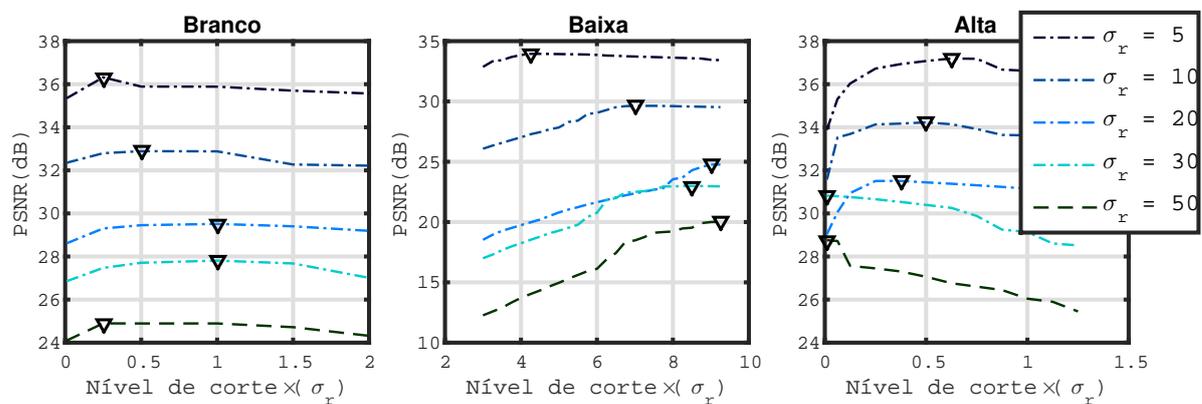
Fonte: O autor.

Figura 39 – Resultados da filtragem do marim3 pela metodologia *AdaptShrinkCurv*, em função do limiar de corte.



Fonte: O autor.

Figura 40 – Resultados da filtragem do marim4 pela metodologia *AdaptShrinkCurv*, em função do limiar de corte.



Fonte: O autor.

Figura 41 – Resultado da remoção de ruídos com metodologia *ksigma*, na seção Marmousi corrompida com ruído de baixa $\sigma_r = 10$. O nível de corte c associado foi de 3 vezes o nível do ruído, valor inferior ao melhor, gráfico 21.

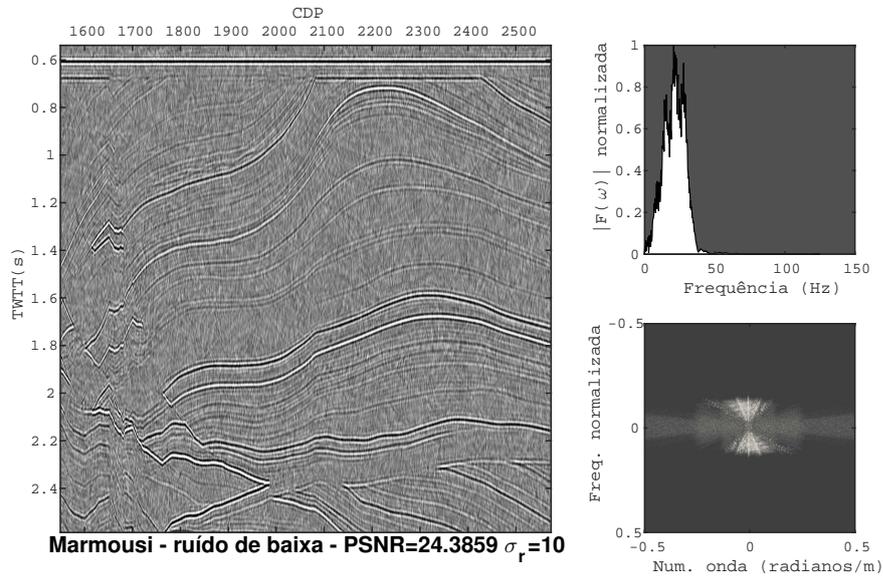


Figura 42 – Resultado da remoção de ruídos com metodologia *ksigma*, na seção Marmousi corrompida com ruído de baixa $\sigma_r = 10$. O nível de corte c associado foi de 6 vezes o nível do ruído, o que levou ao maior valor PSNR, no gráfico 21.

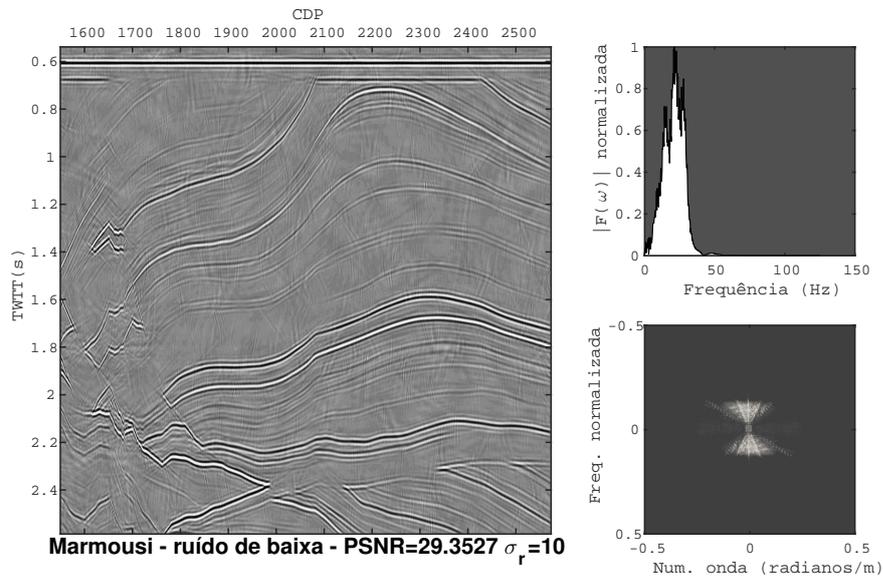
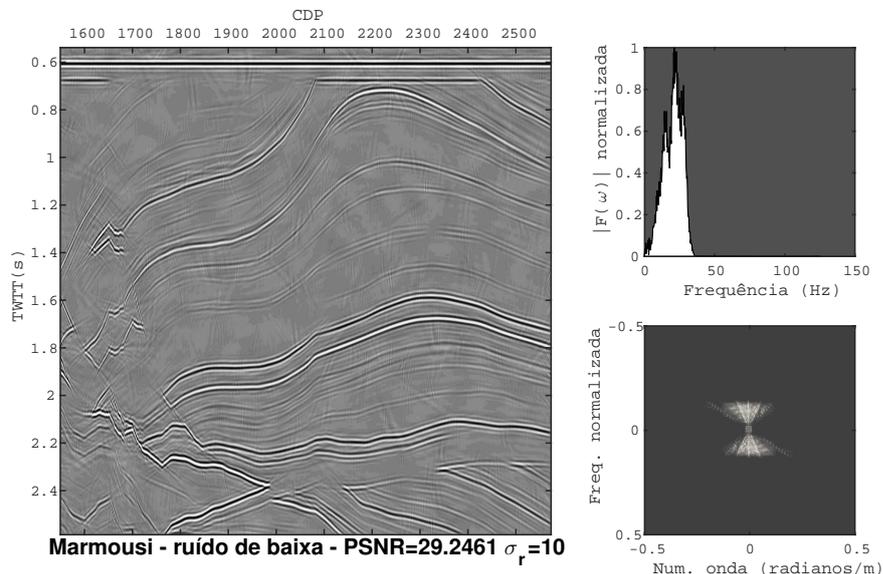


Figura 43 – Resultado da remoção de ruídos com metodologia *ksigma*, na seção Marmousi corrompida com ruído de baixa $\sigma_r = 10$. O nível de corte c associado foi de 7 vezes o nível do ruído, valor relativamente maior que o ótimo em termos PSNR, gráfico 21.



branco, de baixa e de alta. Somente os resultados destes casos são mostrados neste capítulo, uma vez que são suficiente para a discussão. As figuras 45, 47, 49, 51, 53 e 55, referem-se a estas configurações específicas de ruídos. São mostrados os valores PSNR e os mapas de similaridade estrutural, onde quanto mais azul (próximo a 1), maior a similaridade.

A primeira observação da análise destas figuras, é que a PSNR e a SSIM são métricas complementares na quantificação dos resultados. Ainda que a PSNR venha a ser baixa, o mapa SSIM pode indicar alta similaridade, e vice-versa. Cabe então, uma avaliação pormenorizada. Outro ponto importante é que a metodologia *AdaptShrinkCurv*, possui pior performance em regiões específicas do dado, contendo principalmente objetos (refletores) com grandes variações angulares (ângulos próximos a 90/270 graus) e para o caso de ruído branco. Ainda assim, dentre as duas metodologias em questão, esta é que melhor recupera o sinal livre de ruído, produzindo imagens sísmicas com quantidade, relativamente pequena, de artefatos direcionais que, quando ocorrem, possuem orientações preferenciais.

Diferente da *AdaptShrinkCurv*, as seções resultantes de *ksigma* possuem artefatos em toda sua extensão, também com direções preferenciais aparentes. É, possivelmente, nas figuras 47 e 53, onde fica mais fácil distinguir entre as técnicas, sendo evidente a menor capacidade de *ksigma* em recuperar o sinal, e maior de inserir artefatos na imagem filtrada. Por fim, é na parte de superior das seções — acima de 2.4s para Marimba e 1.2s, principalmente no lado esquerdo, da Marmousi—, onde predominam as maiores frequências, que as duas metodologias tem pior performance.

Figura 44 – Marmousi corrompido por ruído branco $\sigma_r = 20$.

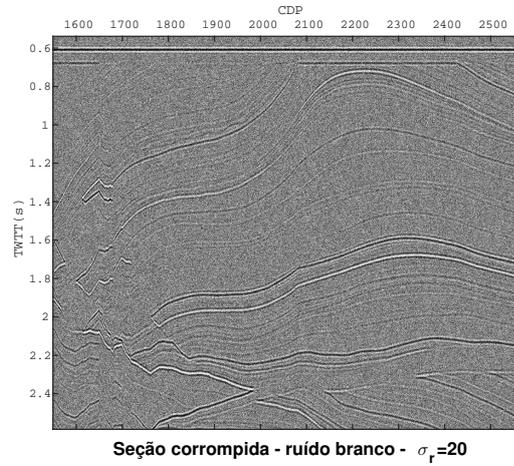


Figura 45 – Remoção de ruídos na seção 44 utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c). Tais resultados referem-se aos gráficos 21 e 31, respectivamente. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).

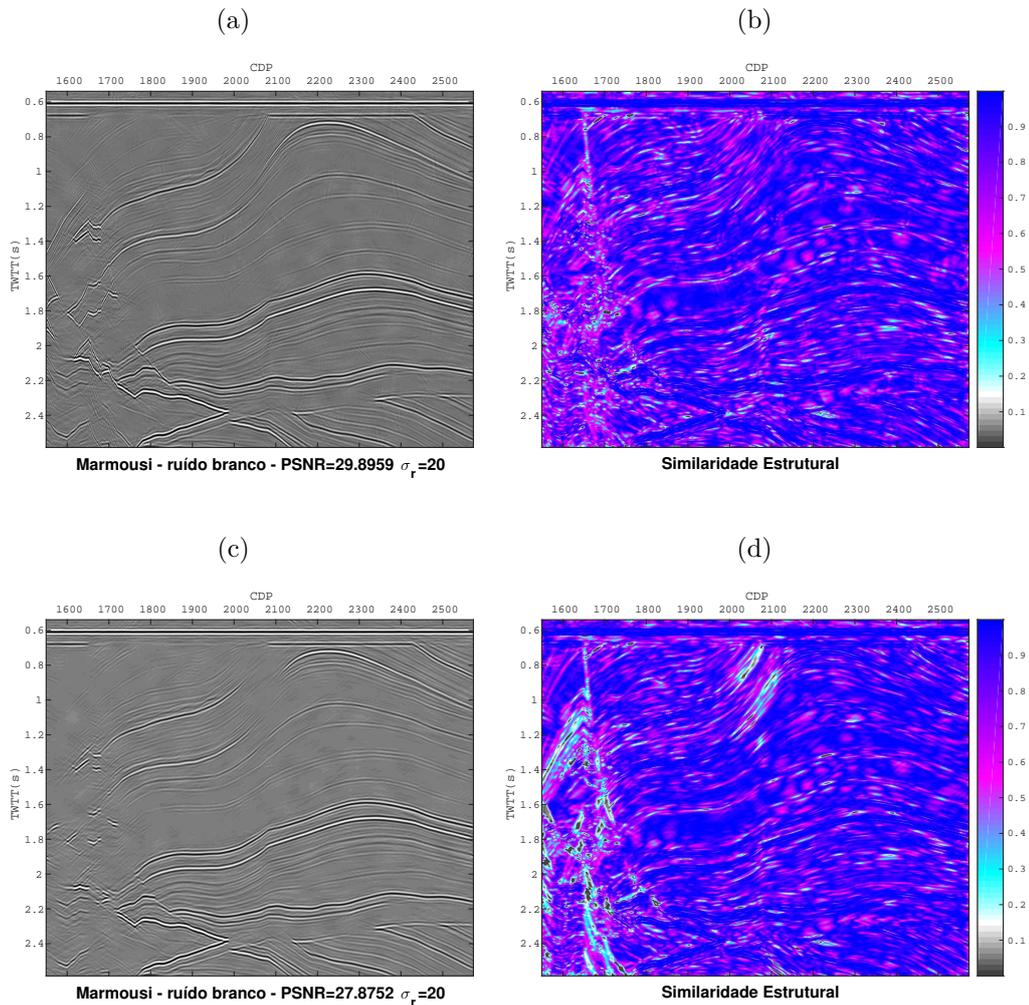


Figura 46 – Marmousi corrompido por ruído de baixa $\sigma_r = 20$.

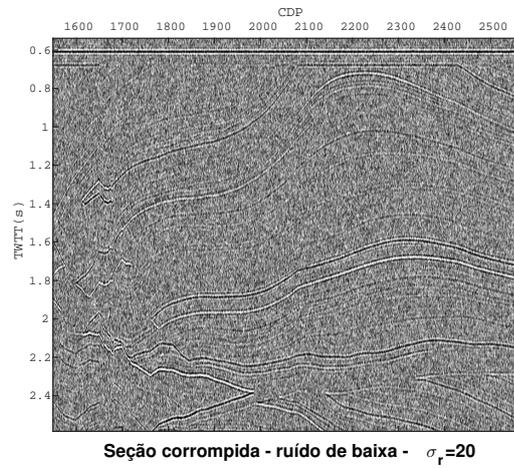


Figura 47 – Remoção de ruídos na seção 46 utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c). Tais resultados referem-se aos gráficos 21 e 31, respectivamente. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).

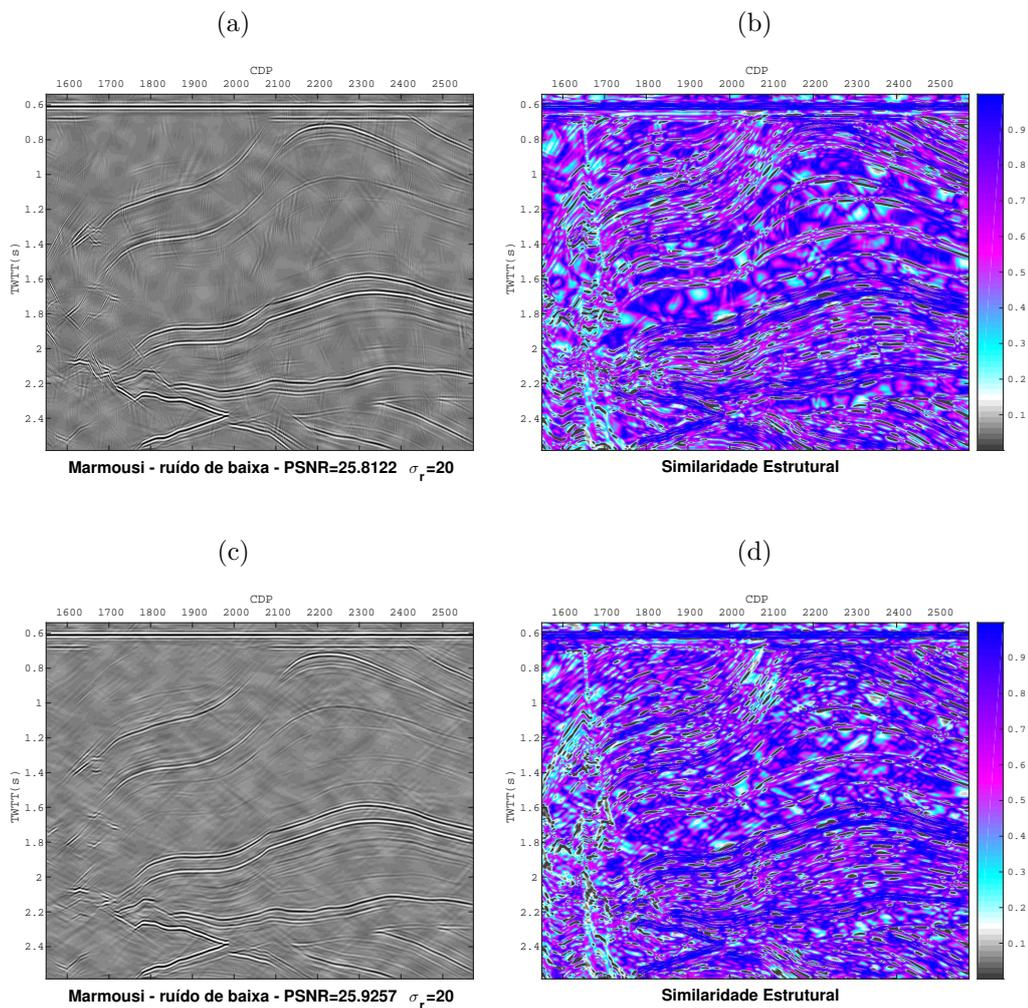


Figura 48 – Marmousi corrompido por ruído de alta $\sigma_r = 20$.

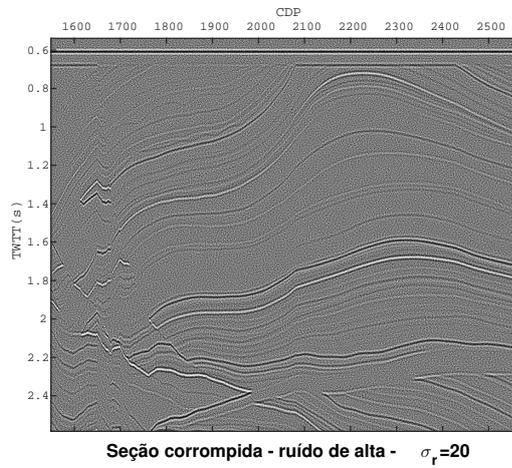


Figura 49 – Remoção de ruídos na seção 48 utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c). Tais resultados referem-se aos gráficos 21 e 31, respectivamente. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).

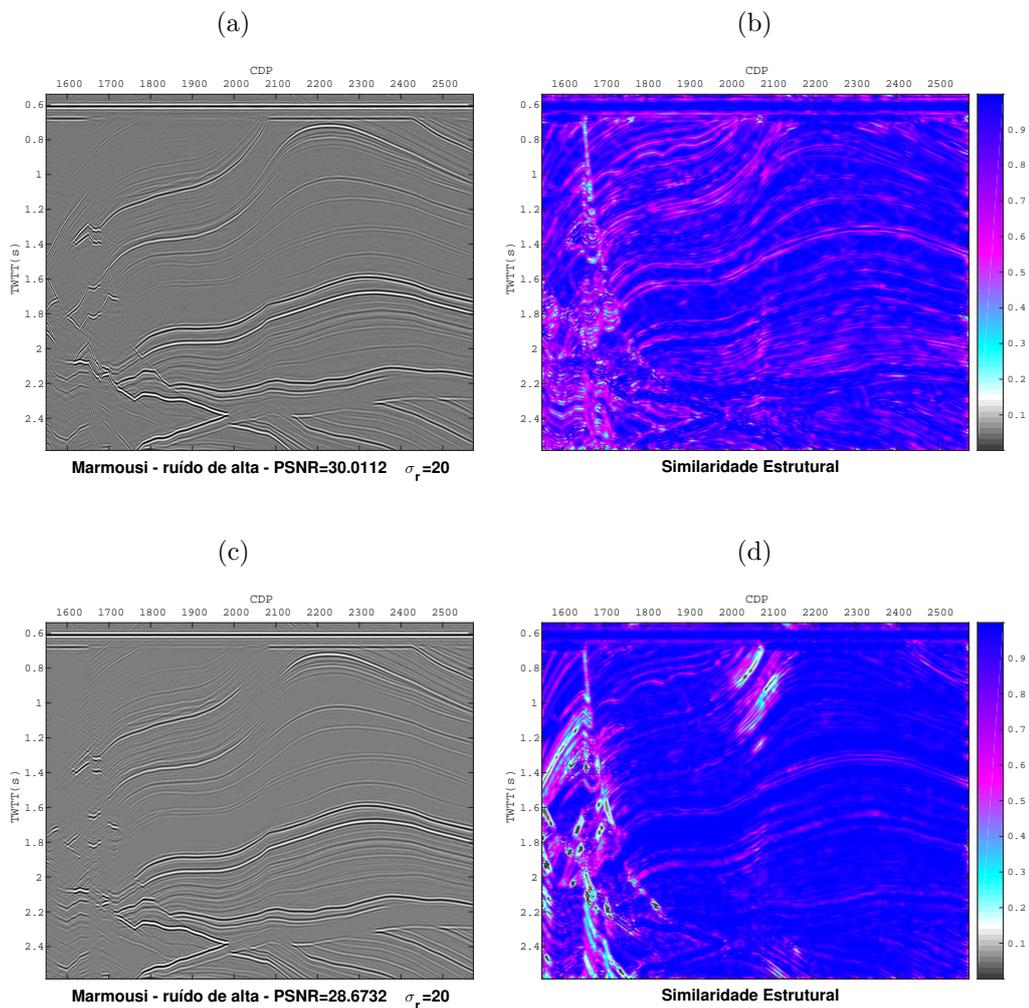


Figura 50 – Marimba corrompido por ruído branco $\sigma_r = 20$.

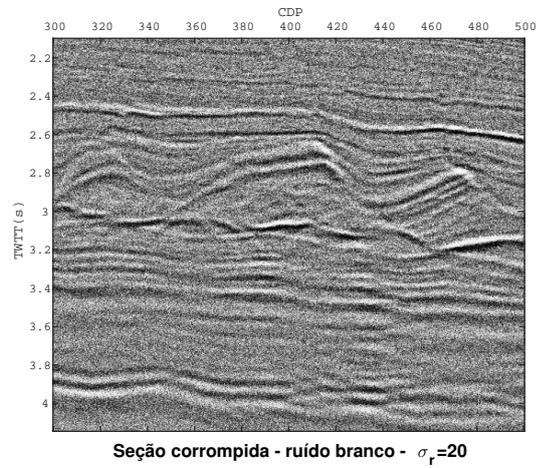


Figura 51 – Remoção de ruídos na seção 50 utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c). Tais resultados referem-se aos gráficos 22 e 32, respectivamente. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).

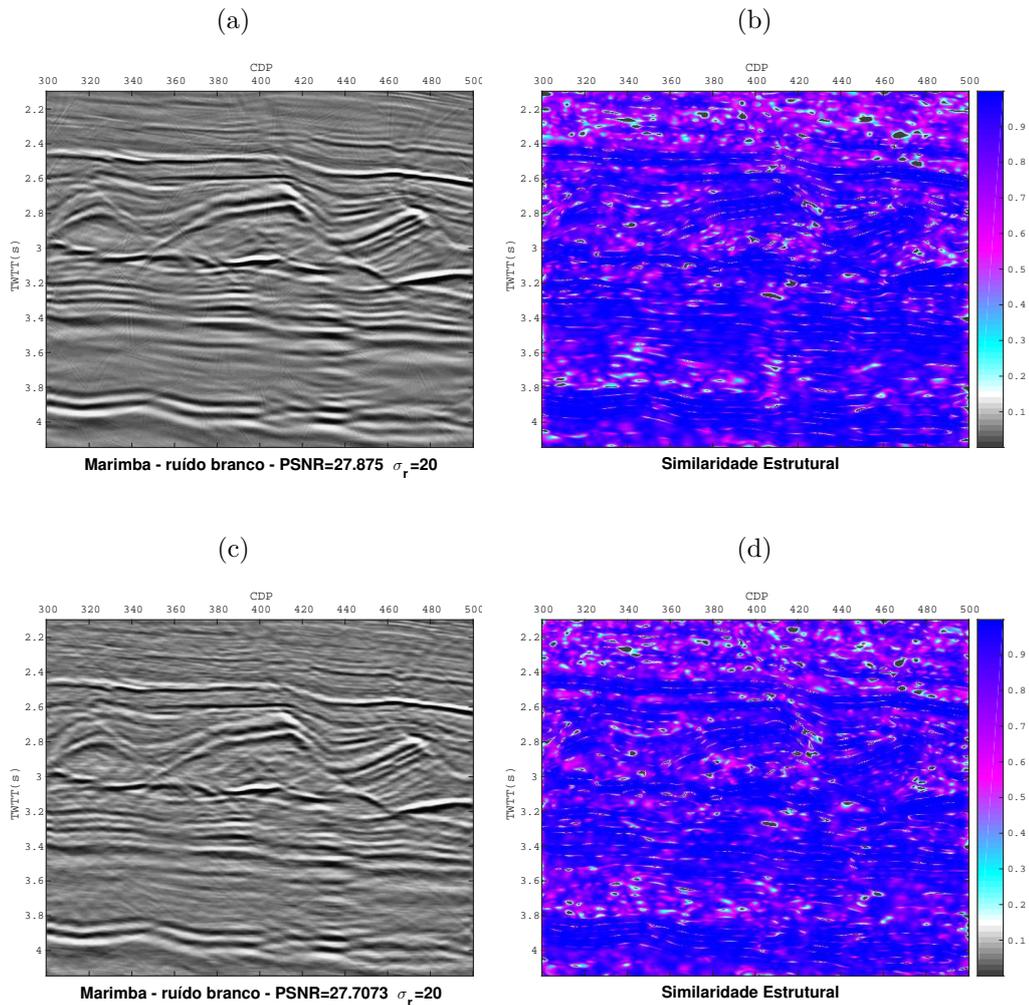


Figura 52 – Marimba corrompido por ruído de baixa $\sigma_r = 20$.

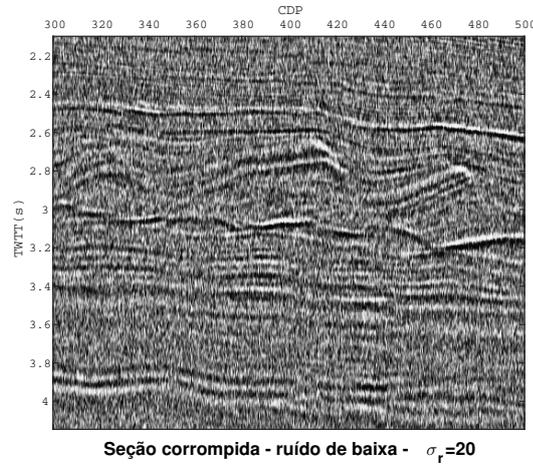


Figura 53 – Remoção de ruídos na seção 52 utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c). Tais resultados referem-se aos gráficos 22 e 32, respectivamente. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).

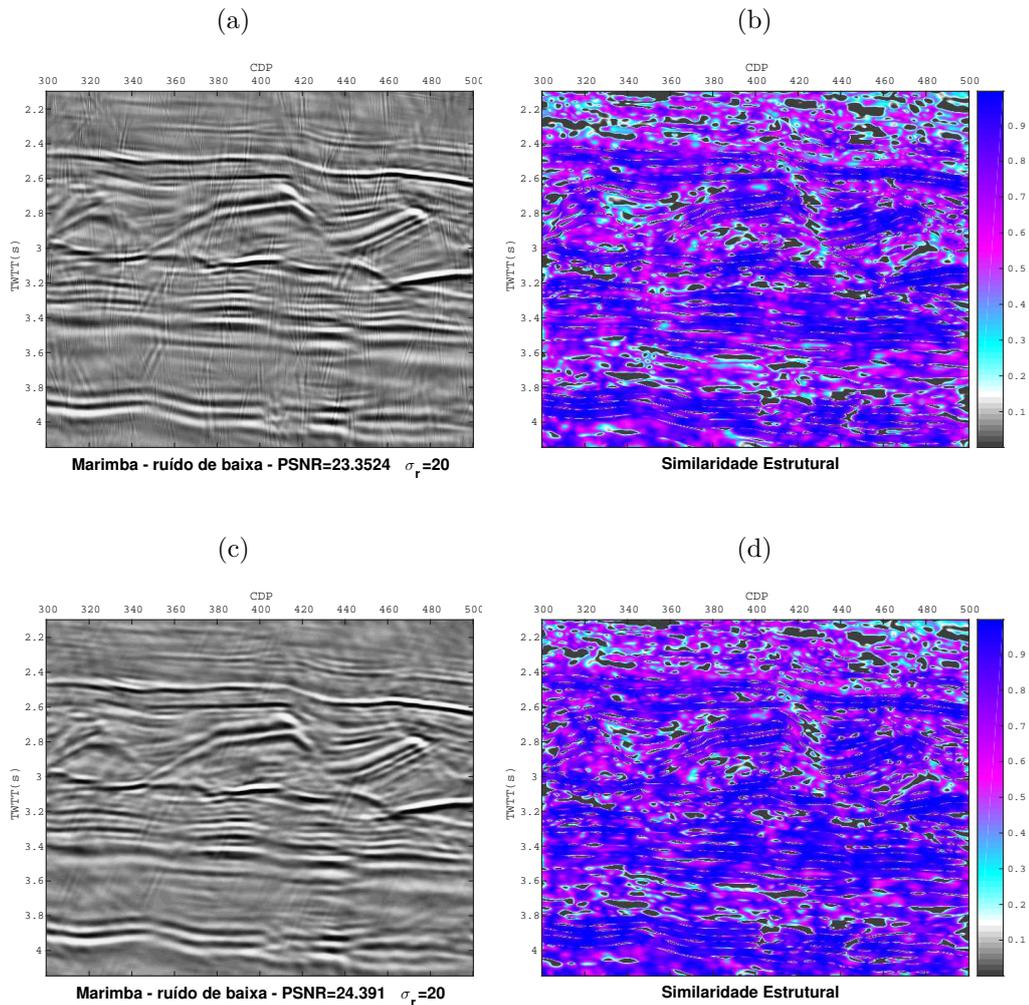


Figura 54 – Marimba corrompido por ruído de alta $\sigma_r = 20$.

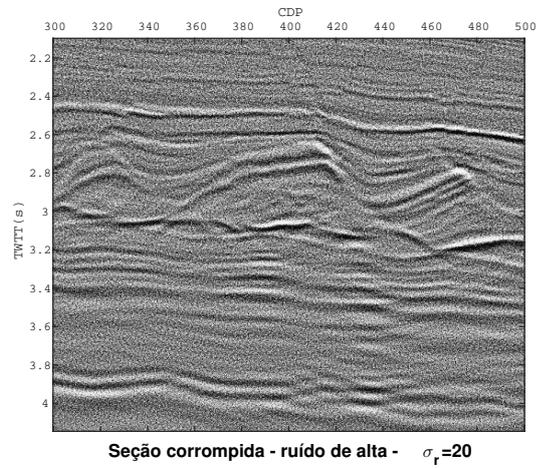


Figura 55 – Remoção de ruídos na seção 54 utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c). Tais resultados referem-se aos gráficos 22 e 32, respectivamente. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).

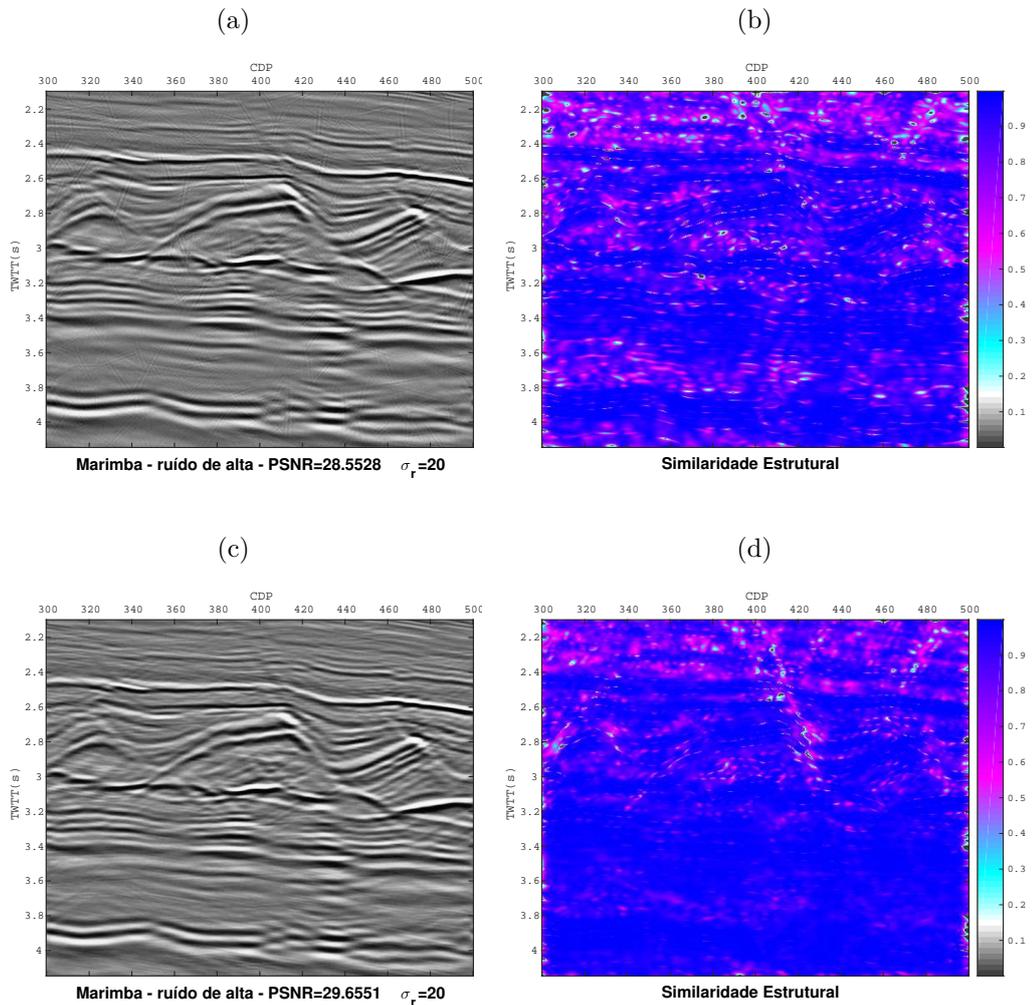
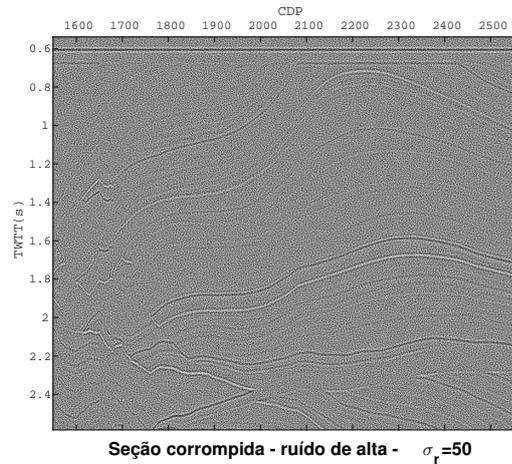


Figura 56 – Marmousi corrompido por ruído de alta $\sigma_r = 50$.

Buscando ilustrar situações com nível mais elevado de ruído, diga-se um cenário extremo, são mostrados os casos em que Marmousi e Marimba estão corrompidos por ruído gaussiano, de alta frequência e com desvio padrão $\sigma_r = 50$, figuras 56 e 58. Examinando os resultados associados, figuras 57 e 59, fica ainda mais evidente a superioridade do *AdaptShrinkCurv* quando da discriminação entre sinal e ruído nos dados corrompidos (chama-se atenção à maior similaridade estrutural descrita pelos mapas SSIM).

Notando que a performance das duas técnicas varia em função da região observada, para as duas seções, estudou-se a aplicação das mesmas, individualmente, nas partições 15 e 16. Após filtragem, elas foram devidamente concatenadas para criar a seção final. Nas regiões com dimensão $(\lfloor \frac{M}{2} \rfloor + 1) \cdot 2$, onde se conectam, foi realizada suavização por média móvel, a fim de garantir correlação entre as partes e atenuar os artefatos correspondentes à concatenação. Entende-se que esta não é a melhor forma de lidar com dados particionados, mas para a finalidade deste trabalho foi suficiente em mostrar a melhoria de performance dos métodos; além de justificar sua aplicação a grandes conjuntos de dados, quando trabalhar em partições é imprescindível. Figuras 60, 61, 62, 63, 64 e 65, mostram os resultados finais.

É evidente a melhoria produzida ao se trabalhar com partes do dado. Além do aumento PSNR, há maior similaridade entre estruturas da seção original e a gerada. Sobretudo nas regiões mais “rasas”, os resultados são significativamente melhores.

Figura 57 – Remoção de ruídos na seção 56 utilizando os métodos: *k*sigma (a) e *AdaptShrinkCurv* (c). Tais resultados referem-se aos gráficos 21 e 31, respectivamente. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).

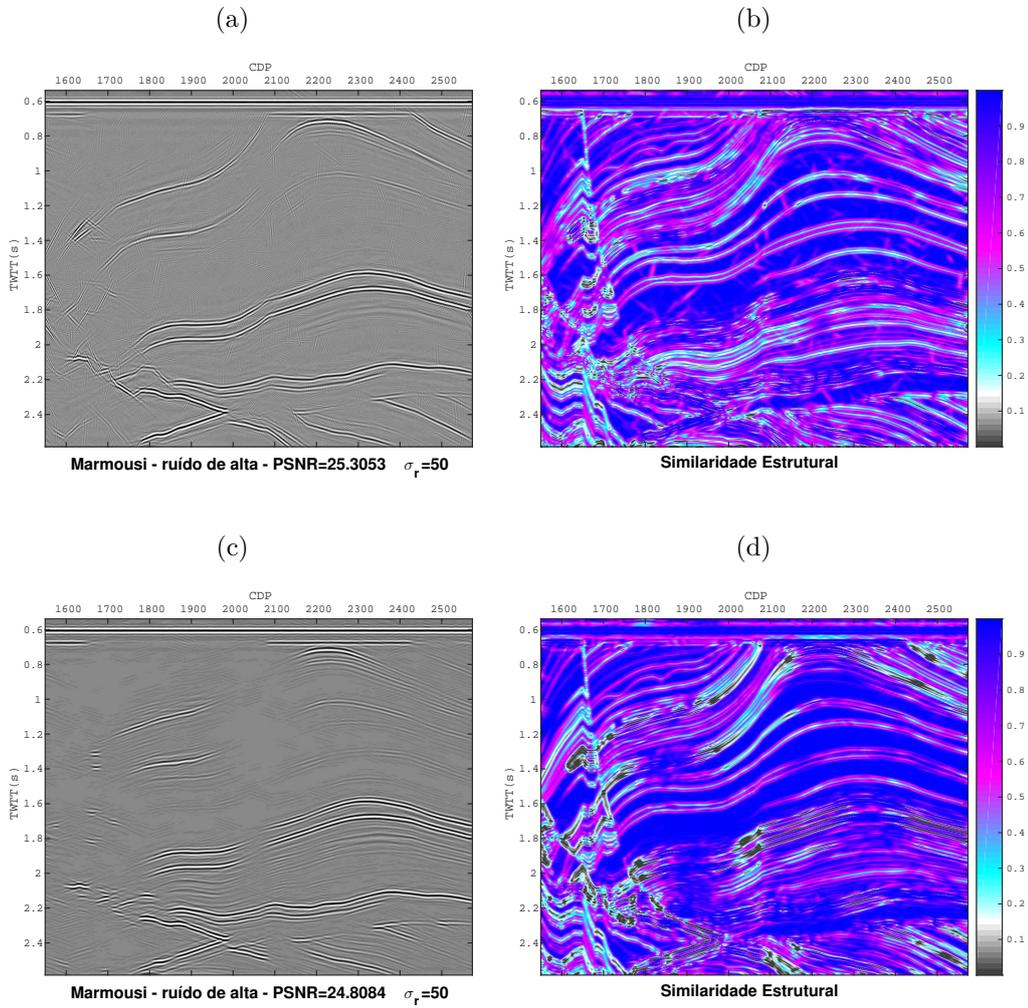


Figura 58 – Marimba corrompido por ruído de alta $\sigma_r = 50$.

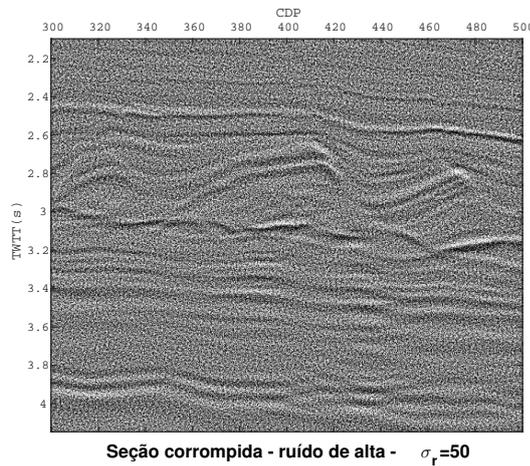


Figura 59 – Remoção de ruídos na seção 58 utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c). Tais resultados referem-se aos gráficos 22 e 32, respectivamente. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).

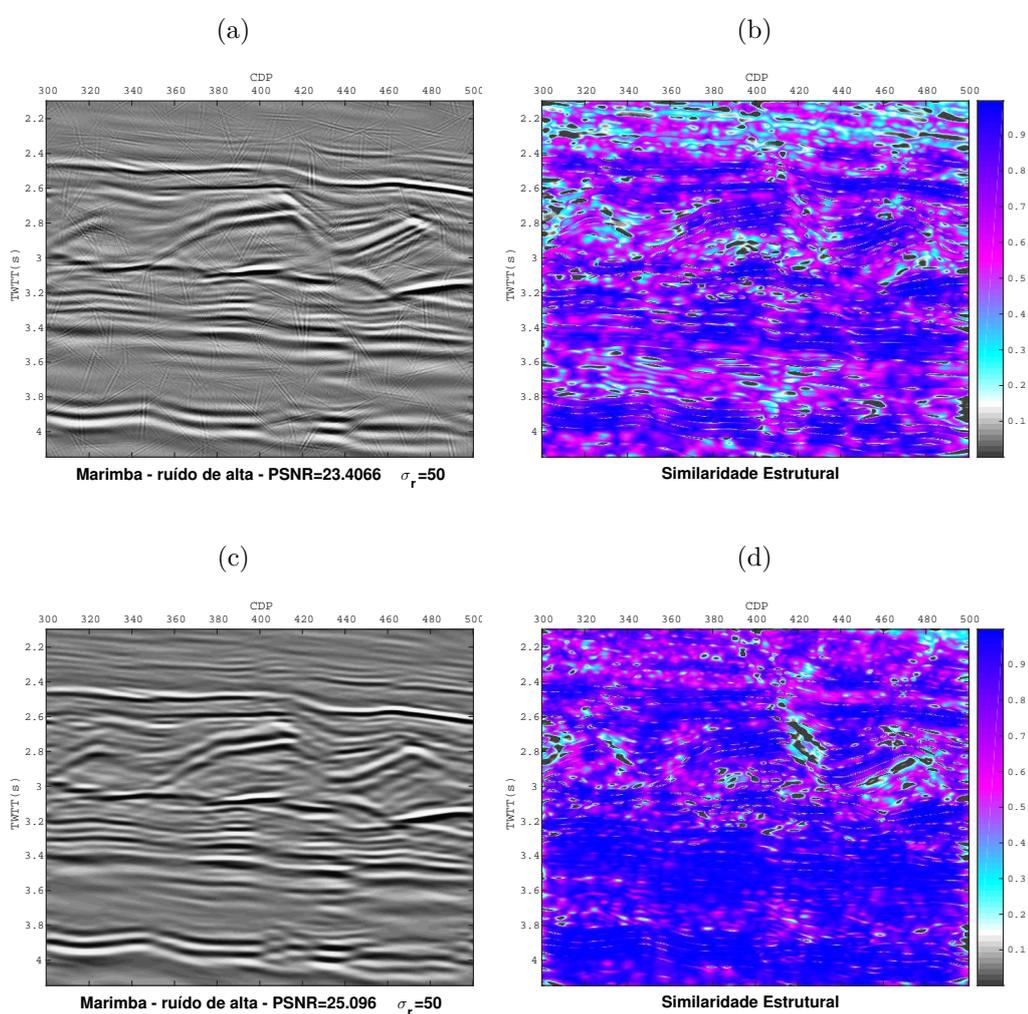


Figura 60 – Remoção de ruídos na seção 44, utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c), aplicados individualmente às partições marm1, marm2, marm3 e marm4. Tais resultados referem-se aos gráficos 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35 e 36. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural, imagens (b) e (d).

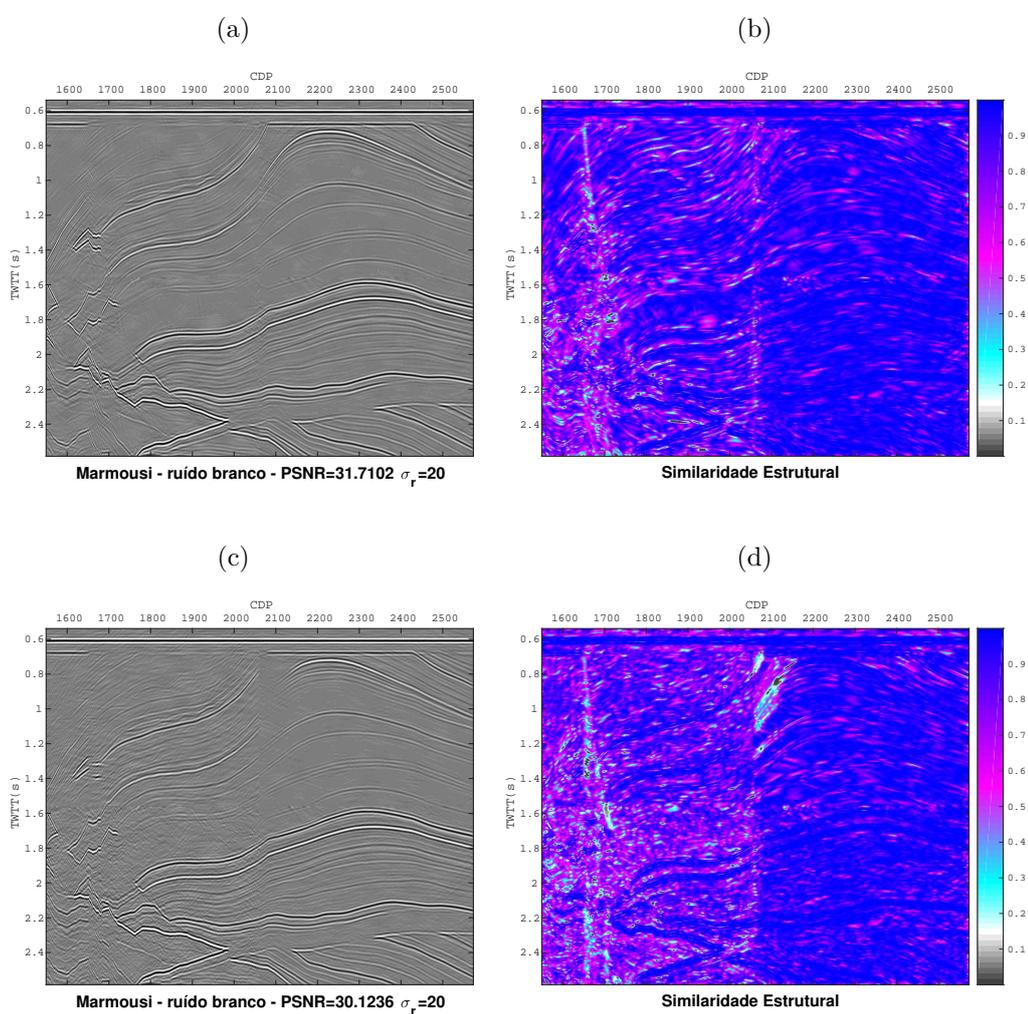


Figura 61 – Remoção de ruídos na seção 46, utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c), aplicados individualmente às partições marm1, marm2, marm3 e marm4. Tais resultados referem-se aos gráficos 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35 e 36. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural, imagens (b) e (d).

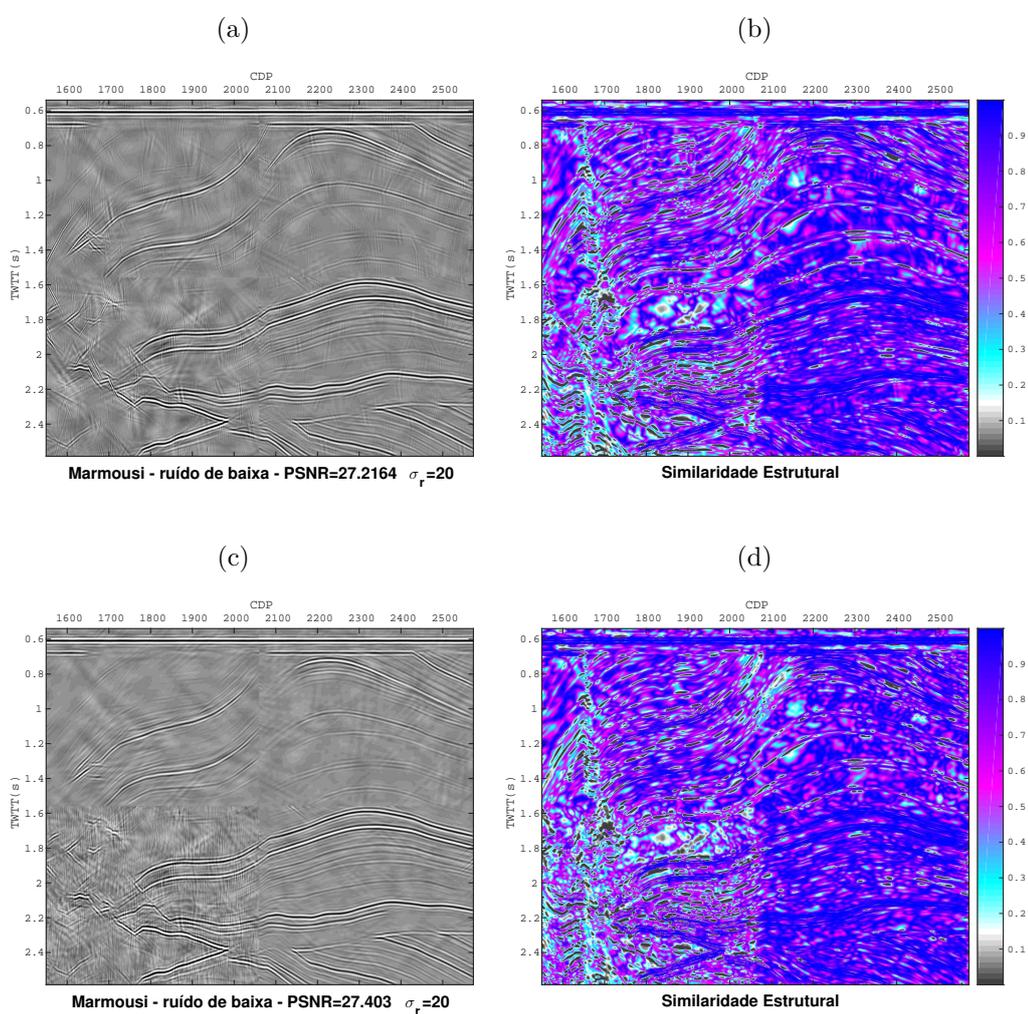


Figura 62 – Remoção de ruídos na seção 48, utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c), aplicados individualmente às partições marm1, marm2, marm3 e marm4. Tais resultados referem-se aos gráficos 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35 e 36. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural, imagens (b) e (d).

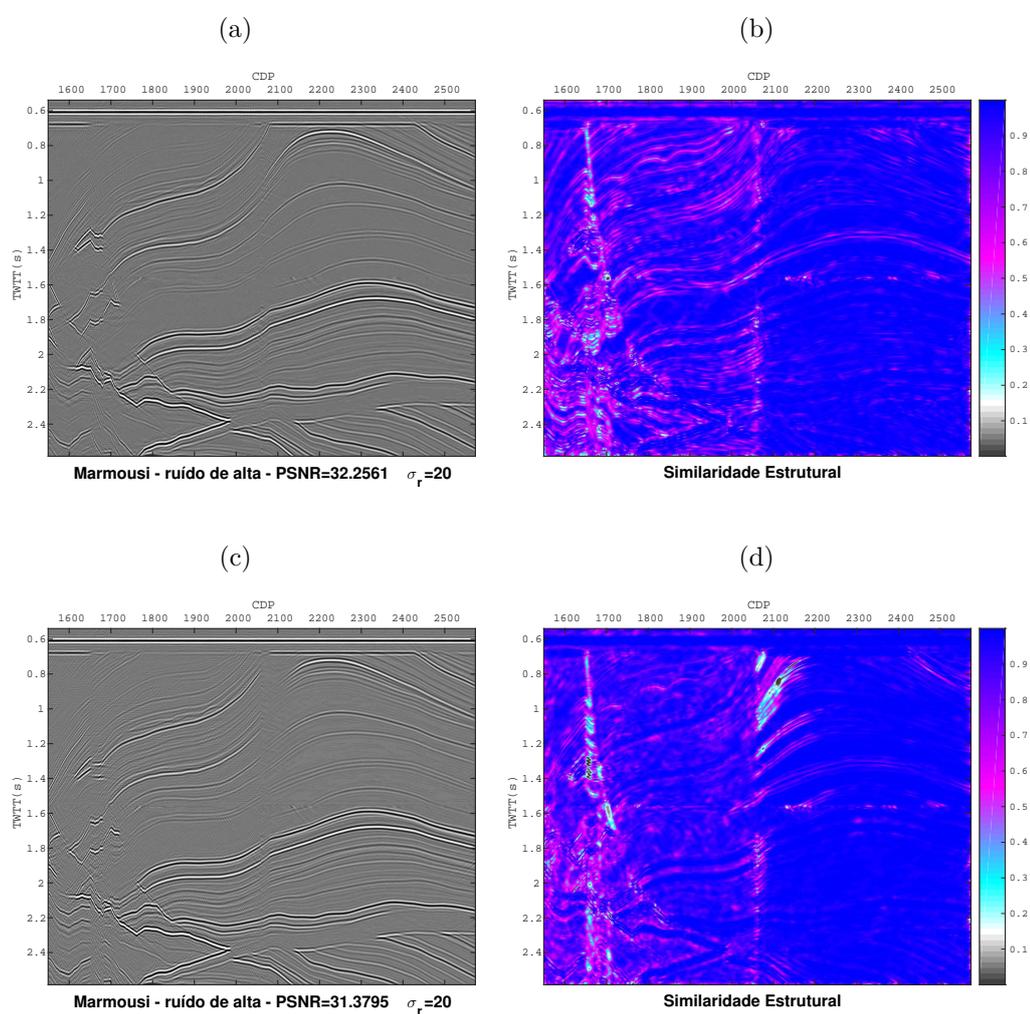


Figura 63 – Remoção de ruídos na seção 50, utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c), aplicados individualmente às partições marim1, marim2, marim3 e marim4. Tais resultados referem-se aos gráficos 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39 e 40. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural, imagens (b) e (d).

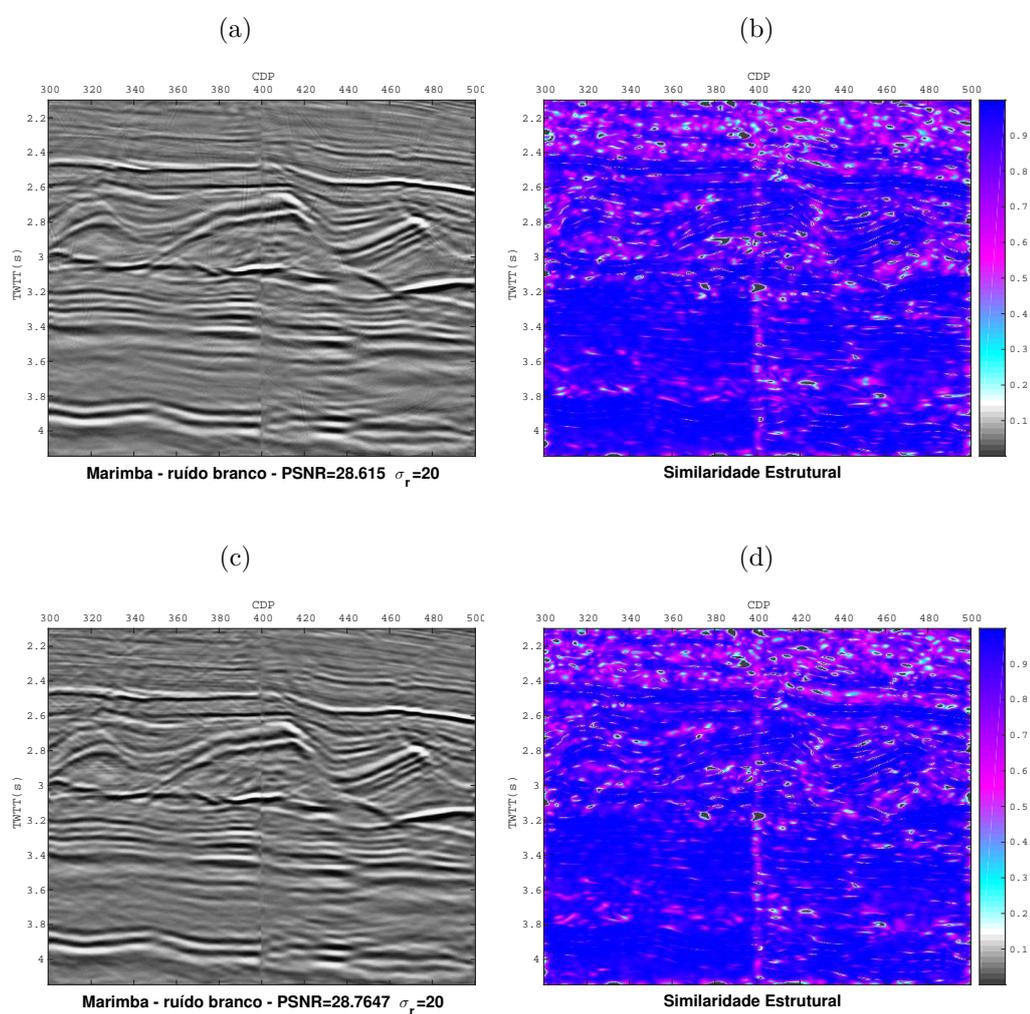


Figura 64 – Remoção de ruídos na seção 52, utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c), aplicados individualmente às partições marim1, marim2, marim3 e marim4. Tais resultados referem-se aos gráficos 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39 e 40. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural, imagens (b) e (d).

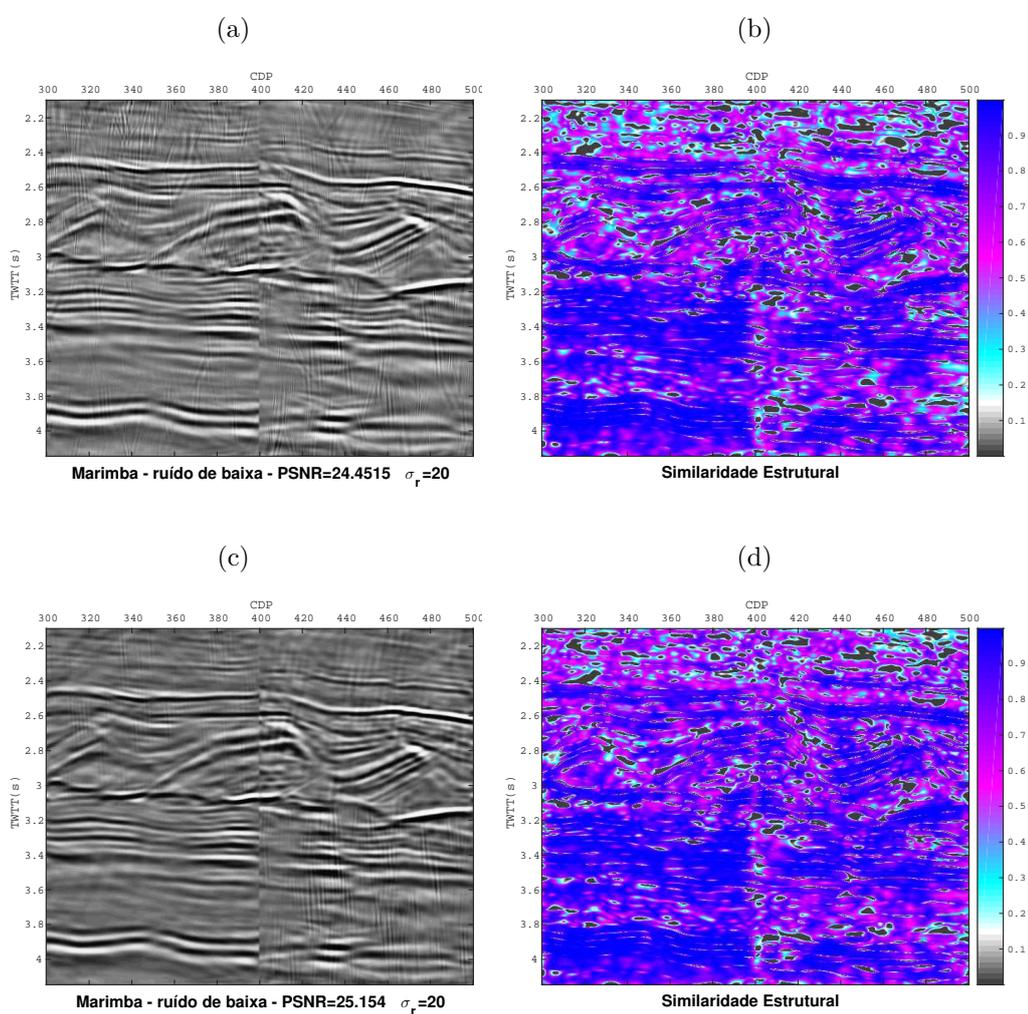
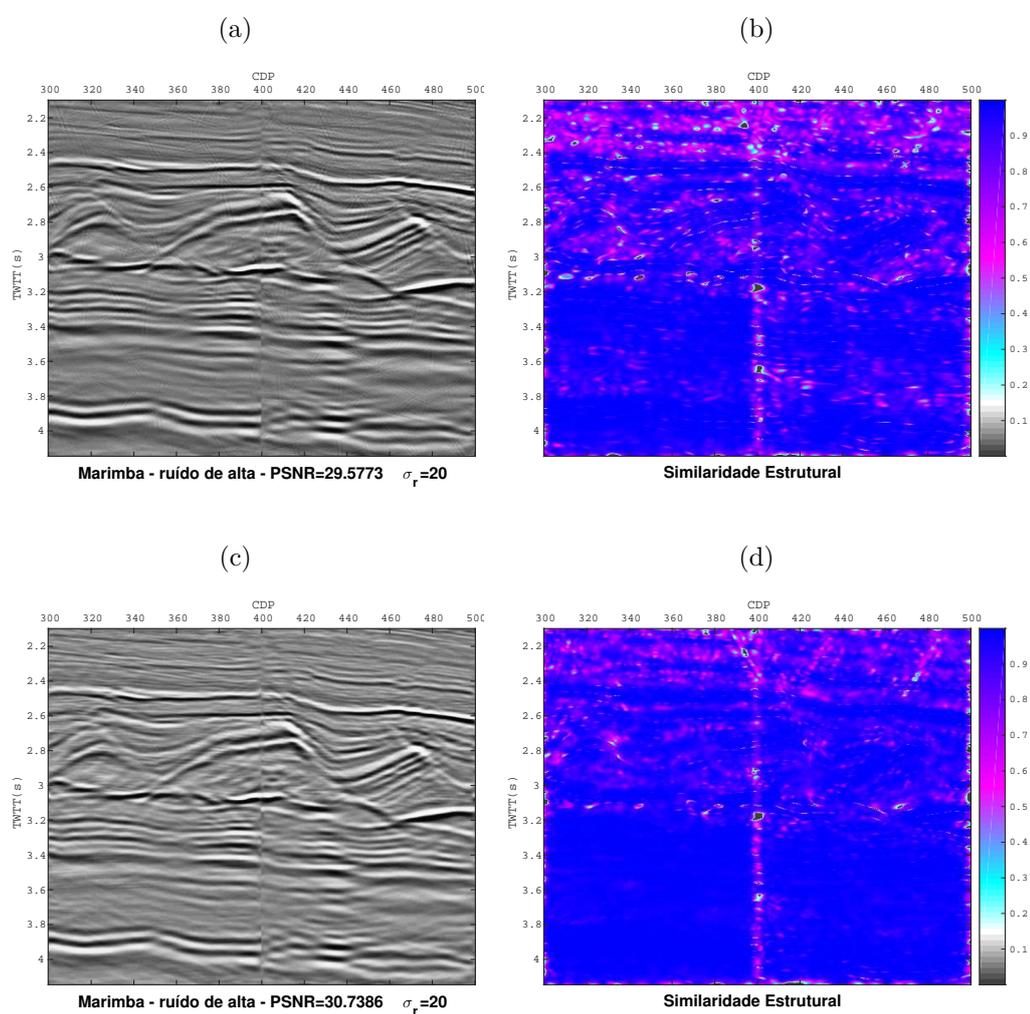


Figura 65 – Remoção de ruídos na seção 54, utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c), aplicados individualmente às partições marim1, marim2, marim3 e marim4. Tais resultados referem-se aos gráficos 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39 e 40. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural, imagens (b) e (d).



5.1.2 Abordagem 2 - ProbShrinkCurv

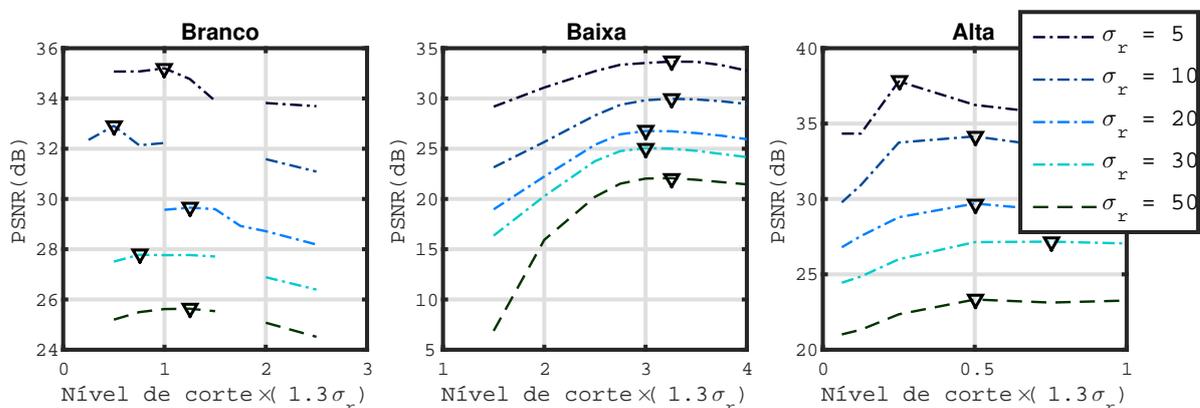
A segunda abordagem testada para remoção de ruídos, como já comentado, consiste no método *ProbShrinkCurv*. Os resultados de sua aplicação às seções completas, quanto à variação do nível de corte, são apresentados nas figuras 66 e 67. Para as partições, apresentam-se os resultados nas figuras 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74 e 75.

Algumas conclusões da sub-seção anterior podem ser estendidas à presente. Mais uma vez o ruído de baixa, por ser correlacionado, mostrou-se como o mais difícil de ser removido. Para esta situação, os valores de t são relativamente mais elevados que para os outros ruídos, mantendo-se próximos a $3 \cdot 1.3\sigma_r$, enquanto limiares $\leq 1.5 \cdot 1.3\sigma_r$ são mais comuns aos outros casos.

Figuras 76, 77 e 78, mostram os resultados para o Marmousi corrompido por ruídos com desvios padrão iguais a 20% do maior valor no sinal. Para o Marimba, considerando o mesmo caso, as seções após filtragem e os mapas SSIM associados, estão nas figuras: 79, 80 e 81. Pela métrica PSNR, o *ProbShrinkCurv* foi, em geral, melhor que as metodologias anteriores (figuras 45, 47, 49, 51, 53 e 55). Analisando os mapas de similaridade, é possível confirmar que, de fato, a presente metodologia obteve melhor performance. Ainda que em alguns casos, produza mais artefatos direcionais que o *AdaptShrinkCurv* ela recupera refletores com grandes inclinações e, para o Marmousi, a parte esquerda da seção tem similaridade significativamente superior (compare figuras 76, 45c e 45d).

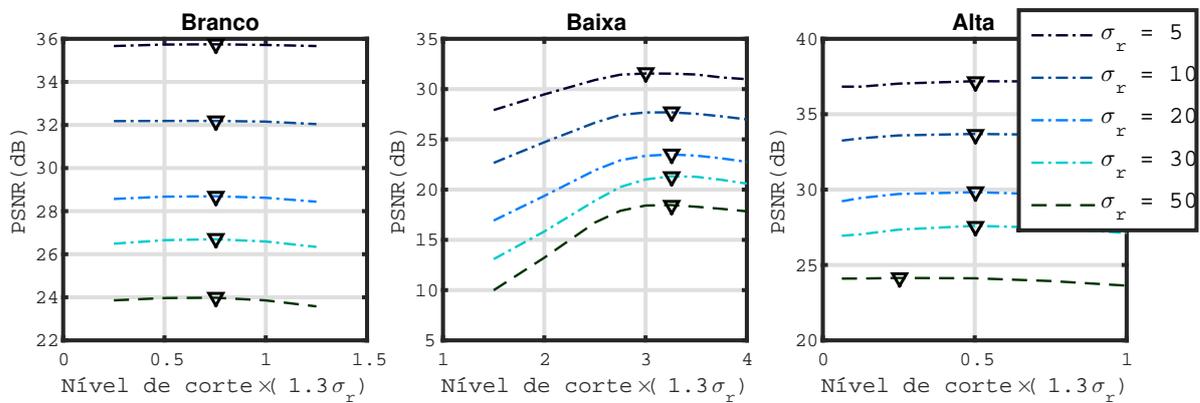
No entanto, a situação do ruído de baixa é uma exceção. Observando os resultados para o Marimba, 80, a parte superior é muito atenuada. Além disso, há presença de artefatos direcionais ao longo de toda a seção. Comparando os resultados de *ksigma* e *AdaptShrinkCurv*, figuras 47 e 53, é possível afirmar que para este tipo de ruído correlacionado, o *AdaptShrinkCurv* é mais eficiente em separar sinal e ruído.

Figura 66 – Variação do limiar de corte para a filtragem do Marmousi completo pela metodologia *ProbShrinkCurv*.



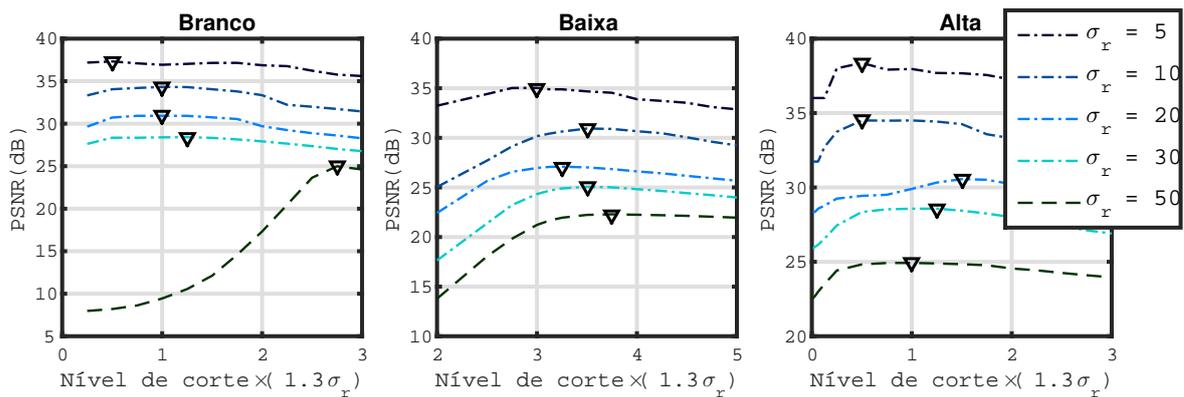
Fonte: O autor.

Figura 67 – Variação do limiar de corte para a filtragem do Marimba completo pela metodologia *ProbShrinkCurv*.



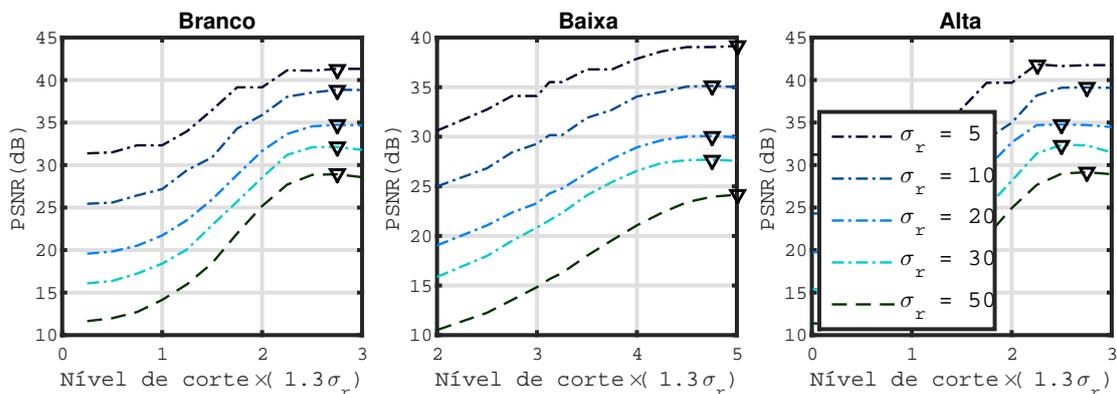
Fonte: O autor.

Figura 68 – Resultados da filtragem do marm1 pela metodologia *ProbShrinkCurv*, em função do limiar de corte.



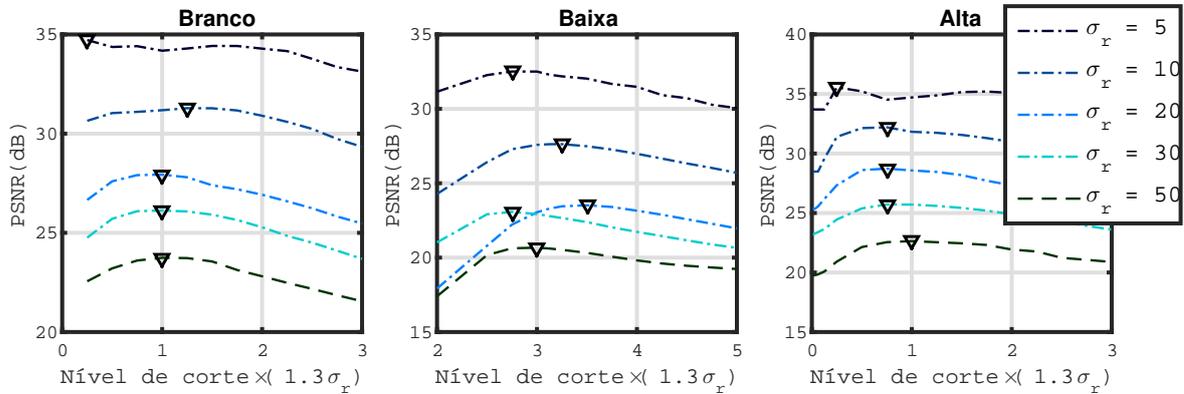
Fonte: O autor.

Figura 69 – Resultados da filtragem do marm2 pela metodologia *ProbShrinkCurv*, em função do limiar de corte.



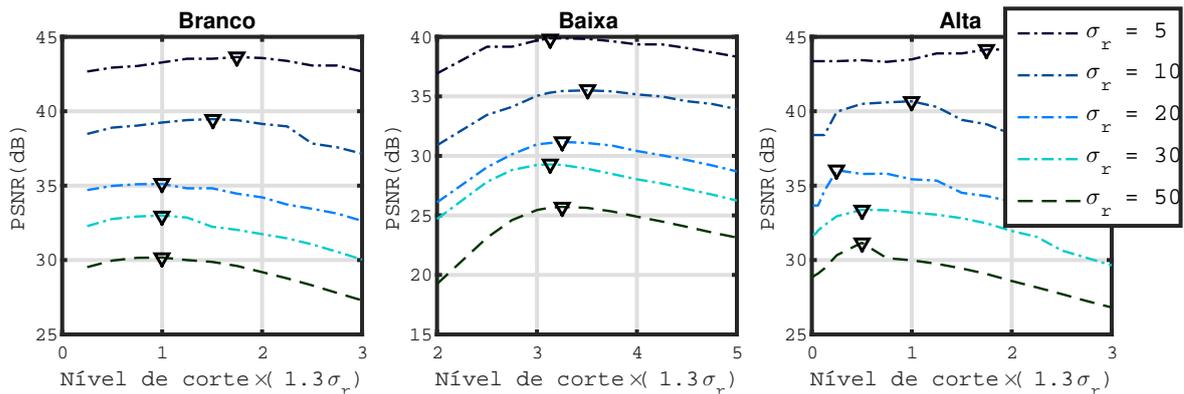
Fonte: O autor.

Figura 70 – Resultados da filtragem do marm3 pela metodologia *ProbShrinkCurv*, em função do limiar de corte.



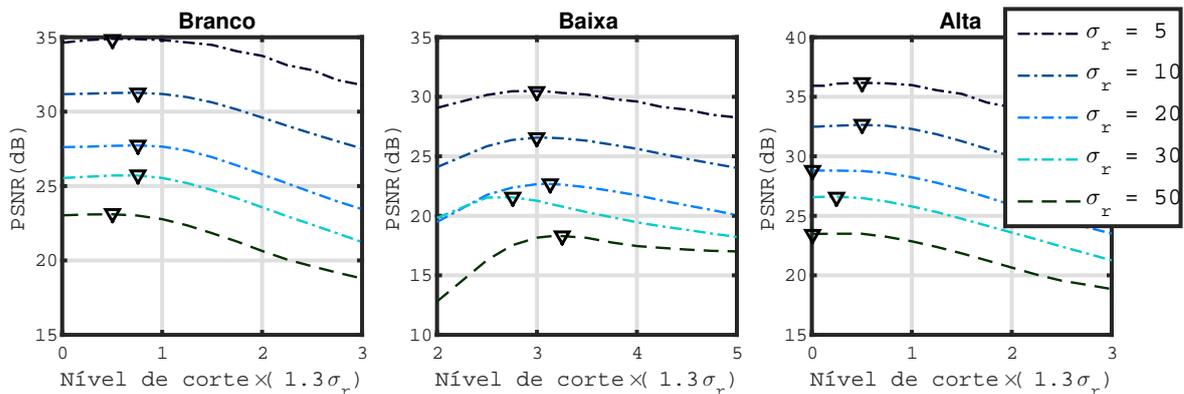
Fonte: O autor.

Figura 71 – Resultados da filtragem do marm4 pela metodologia *ProbShrinkCurv*, em função do limiar de corte.



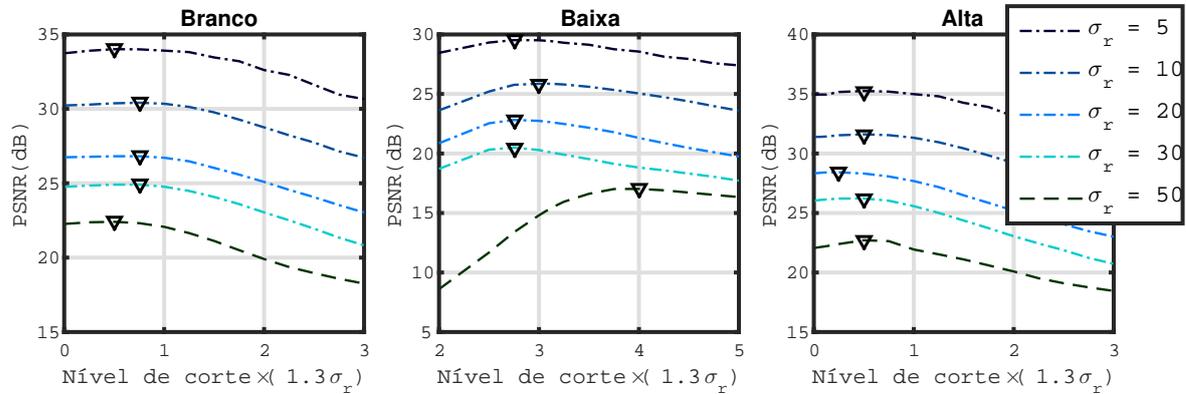
Fonte: O autor.

Figura 72 – Resultados da filtragem do marim1 pela metodologia *ProbShrinkCurv*, em função do limiar de corte.



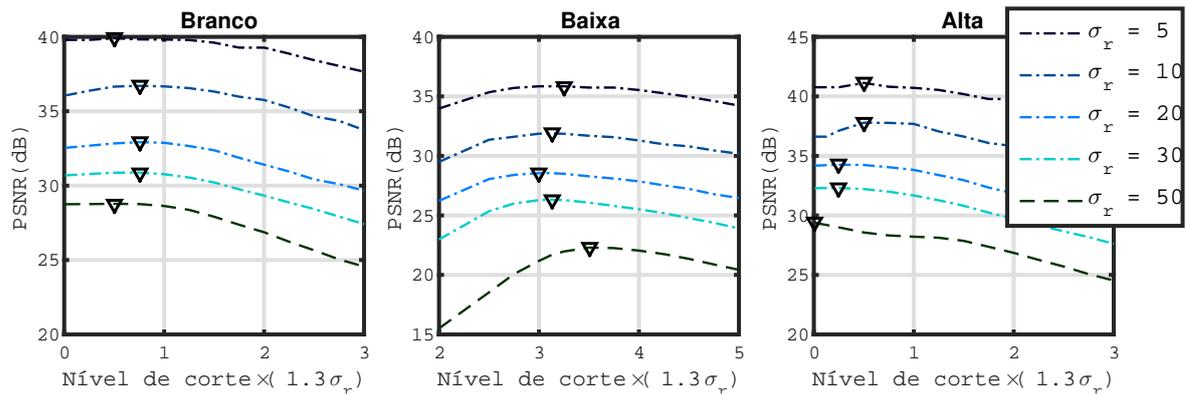
Fonte: O autor.

Figura 73 – Resultados da filtragem do marim2 pela metodologia *ProbShrinkCurv*, em função do limiar de corte.



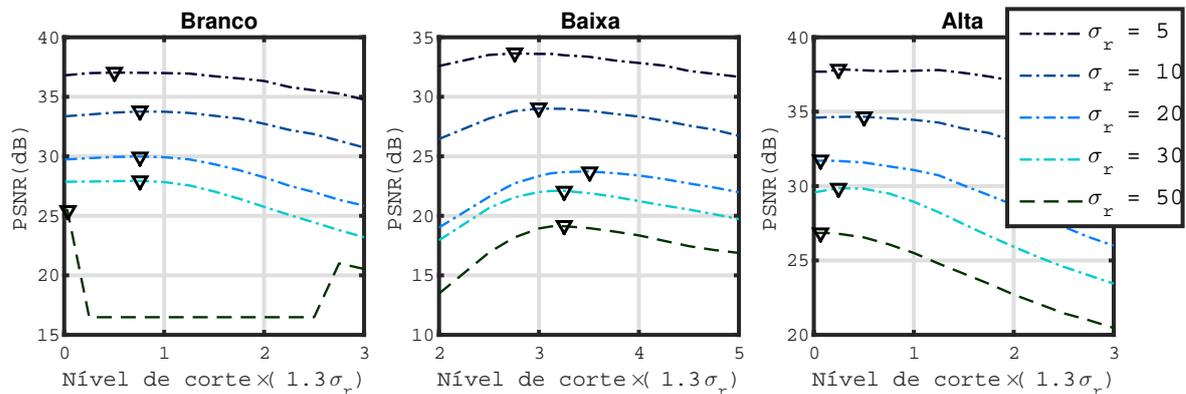
Fonte: O autor.

Figura 74 – Resultados da filtragem do marim3 pela metodologia *ProbShrinkCurv*, em função do limiar de corte.



Fonte: O autor.

Figura 75 – Resultados da filtragem do marim4 pela metodologia *ProbShrinkCurv*, em função do limiar de corte.



Fonte: O autor.

Figura 76 – Remoção de ruídos na seção 44 utilizando o método *ProbShrinkCurv* (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se ao gráfico 66.

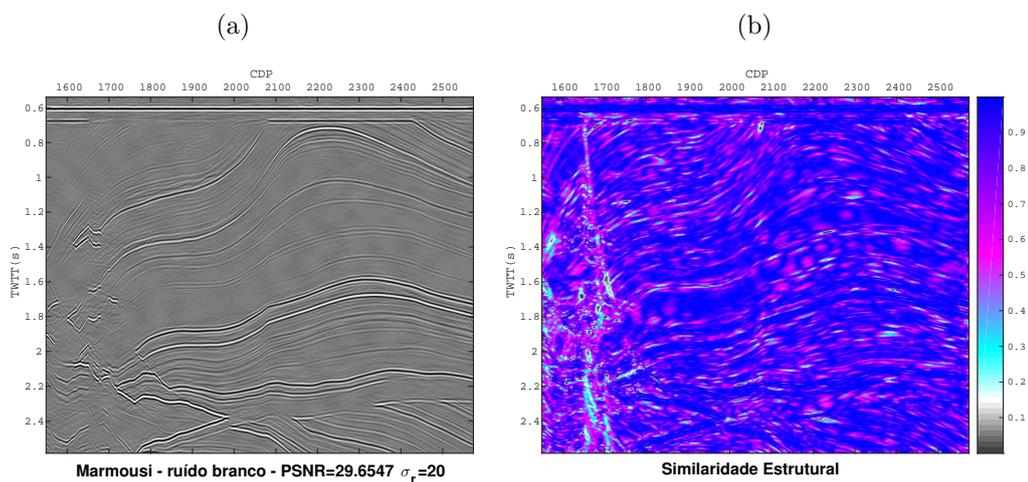


Figura 77 – Remoção de ruídos na seção 46 utilizando o método *ProbShrinkCurv* (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se ao gráfico 66.

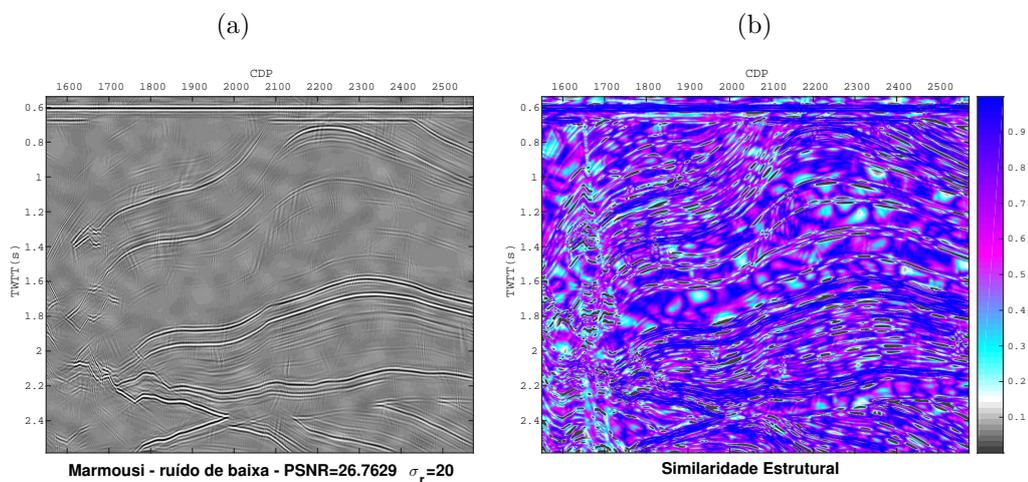


Figura 78 – Remoção de ruídos na seção 48 utilizando o método *ProbShrinkCurv* (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se ao gráfico 66.

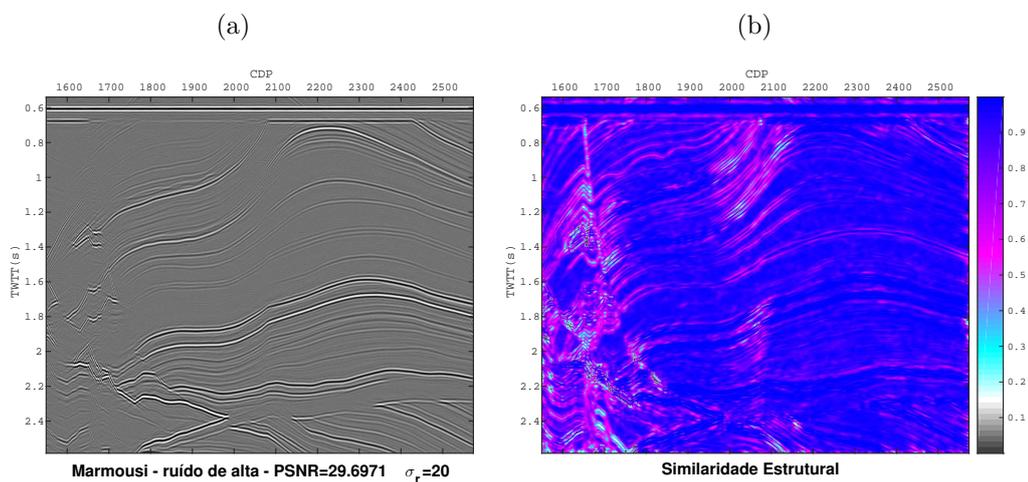


Figura 79 – Remoção de ruídos na seção 50 utilizando o método *ProbShrinkCurv* (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se ao gráfico 67.

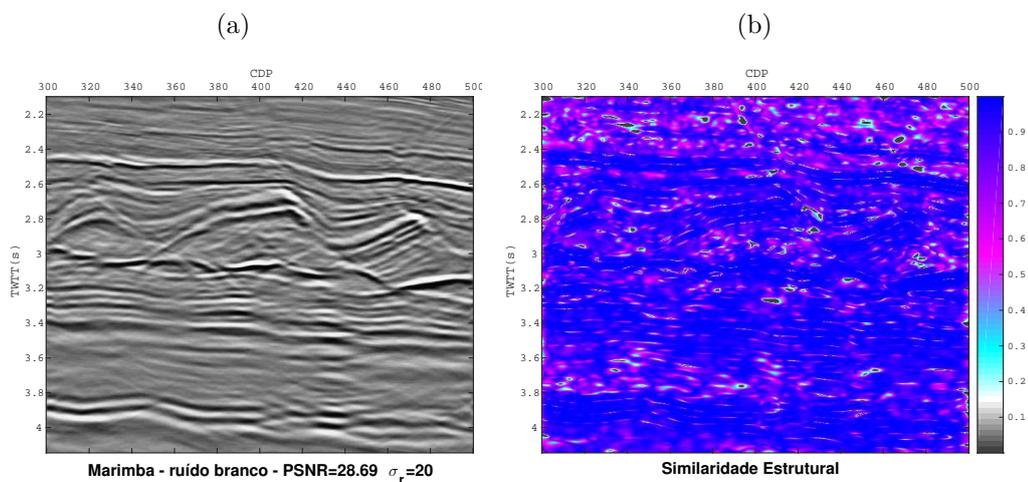


Figura 80 – Remoção de ruídos na seção 52 utilizando o método *ProbShrinkCurv* (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se ao gráfico 67.

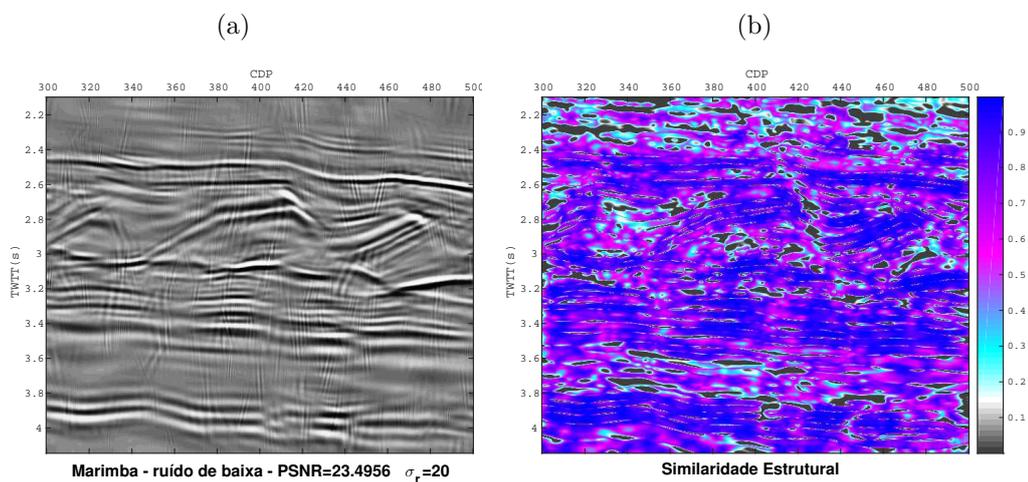


Figura 81 – Remoção de ruídos na seção 54 utilizando o método *ProbShrinkCurv* (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se ao gráfico 67.

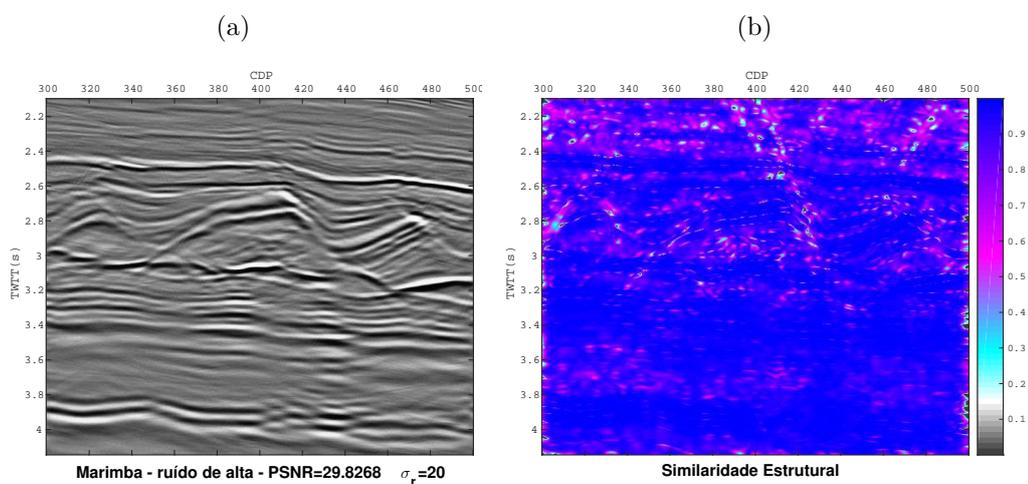
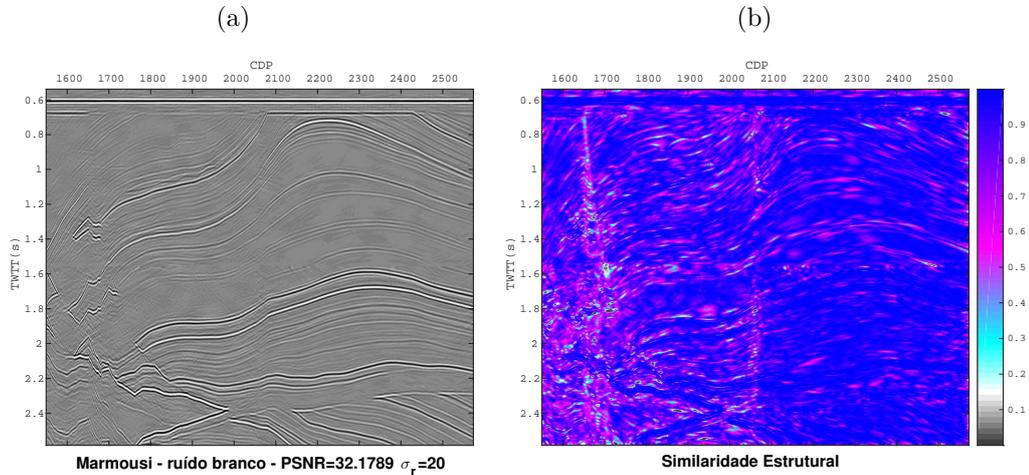


Figura 82 – Remoção de ruídos na seção 44 utilizando o método *ProbShrinkCurv* (a), aplicado individualmente às partições marm1, marm2, marm3 e marm4, e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se aos gráficos 68, 69, 70 e 71.



Sob mesma justificativa e seguindo os mesmos procedimentos da sub-seção acima, a presente metodologia foi aplicada, individualmente, às partições 15 e 16. Os resultados são apresentados nas figuras 82, 83, 84, 85, 86 e 87.

Também para estas situações, o *ProbShrinkCurv* apresenta maior capacidade, no geral, em discernir sinal e ruído comparativamente aos outros métodos. A métrica PSNR produz os maiores valores, exceto para o ruído de baixa no Marimba, quando o máximo está associado ao *AdaptShrinkCurv* (figura 64c). De fato, quanto às duas seções estudadas, para o caso do ruído de baixa, é difícil estabelecer a melhor performance pelos mapas SSIM. No entanto, a análise detalhada permite afirmar que a metodologia desta sub-seção, é pouco menos eficiente que a técnica de truncamento suave da anterior, ainda que seus mapas SSIM sejam, à primeira vista, muito semelhantes.

Por fim, uma última exceção deve ser discutida, uma vez que possui discrepâncias muito evidentes. O ruído de alta para o Marmousi, figura 83 em comparação às figuras 65c e 65d. Focando principalmente na parte superior esquerda, marm1, é possível argumentar que o *AdaptShrinkCurv* atua melhor.

Figura 83 – Remoção de ruídos na seção 46 utilizando o método *ProbShrinkCurv* (a), aplicado individualmente às partições marm1, marm2, marm3 e marm4, e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se aos gráficos 68, 69, 70 e 71.

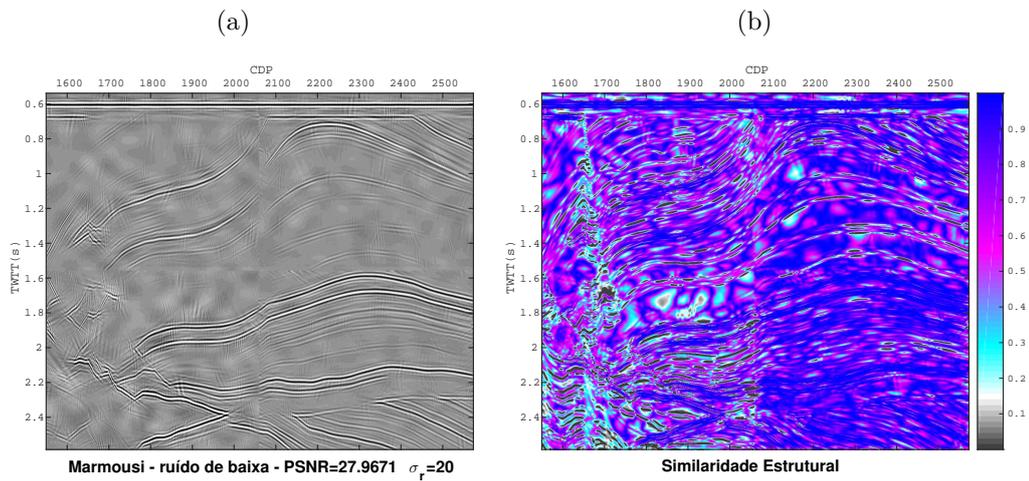


Figura 84 – Remoção de ruídos na seção 48 utilizando o método *ProbShrinkCurv* (a), aplicado individualmente às partições marm1, marm2, marm3 e marm4, e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se aos gráficos 68, 69, 70 e 71.

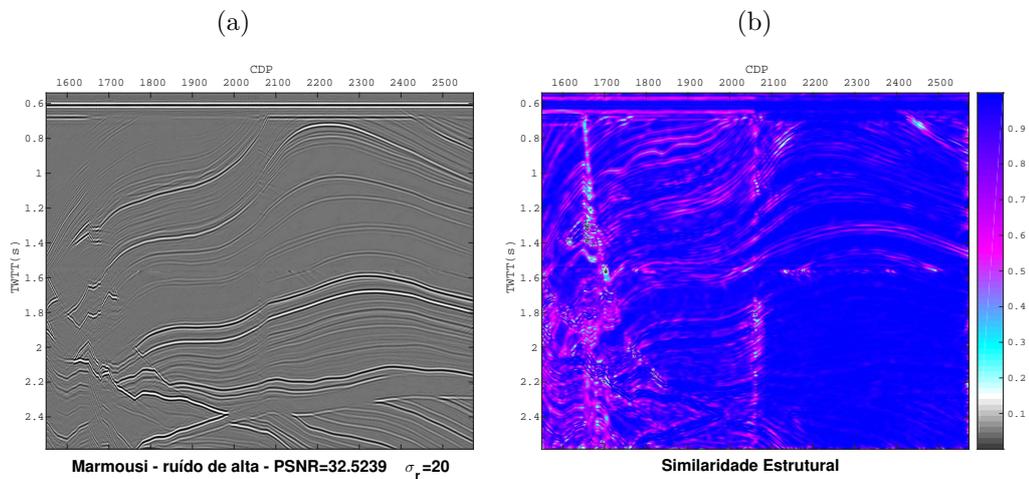


Figura 85 – Remoção de ruídos na seção 50 utilizando o método *ProbShrinkCurv* (a), aplicado individualmente às partições marim1, marim2, marim3 e marim4, e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se aos gráficos 72, 73, 74 e 75.

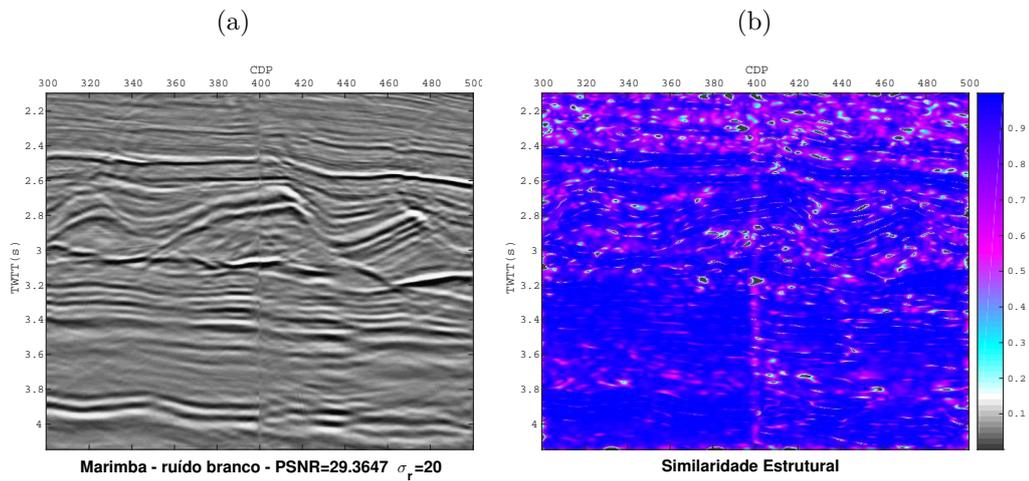


Figura 86 – Remoção de ruídos na seção 52 utilizando o método *ProbShrinkCurv* (a), aplicado individualmente às partições marim1, marim2, marim3 e marim4, e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se aos gráficos 72, 73, 74 e 75.

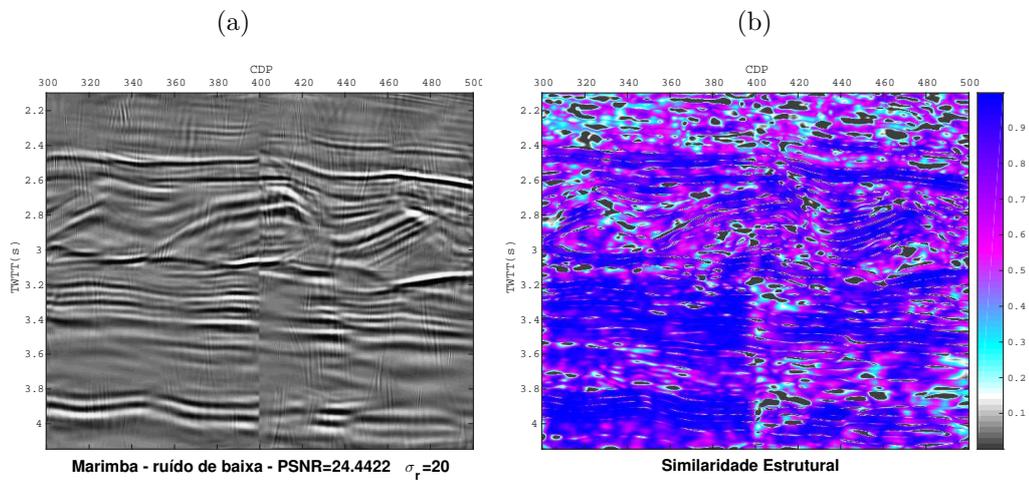
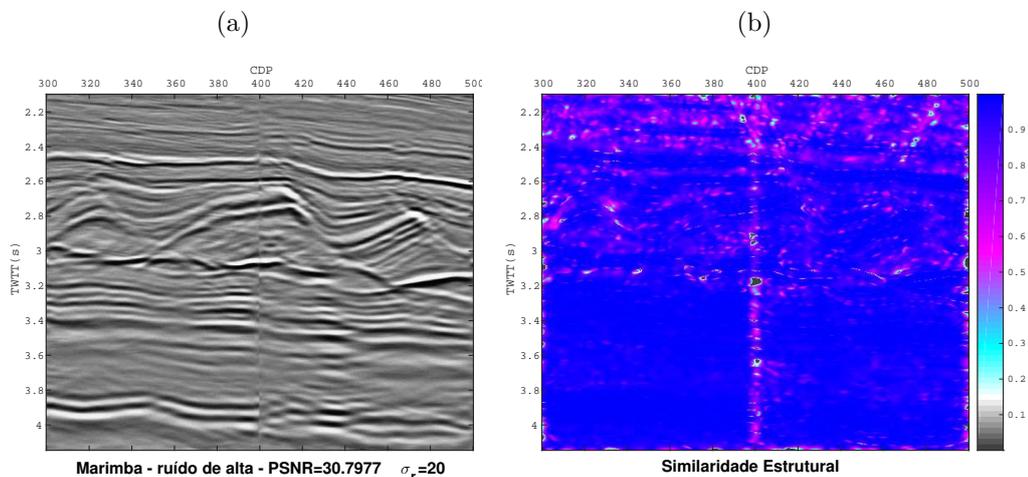


Figura 87 – Remoção de ruídos na seção 54 utilizando o método *ProbShrinkCurv* (a), aplicado individualmente às partições marim1, marim2, marim3 e marim4, e mapa de similaridade estrutural resultante (b). Este resultado refere-se aos gráficos 72, 73, 74 e 75.



5.1.3 Refinamento dos resultados e Análise da Inversão do traço

Para as três metodologias discutidas, a presença de artefatos de alta frequência (direcionais), assim como de baixa — representados visualmente como uma textura ”em bolhas” na seções — é evidente. Quando objetivando uma análise qualitativa dos dados sísmicos, os resultados acima podem ser considerados satisfatórios. No entanto, quando do estudo envolvendo técnicas quantitativas, quanto menos artefatos no dado observado, maior a precisão e, conseqüentemente, a confiabilidade nos resultados obtidos.

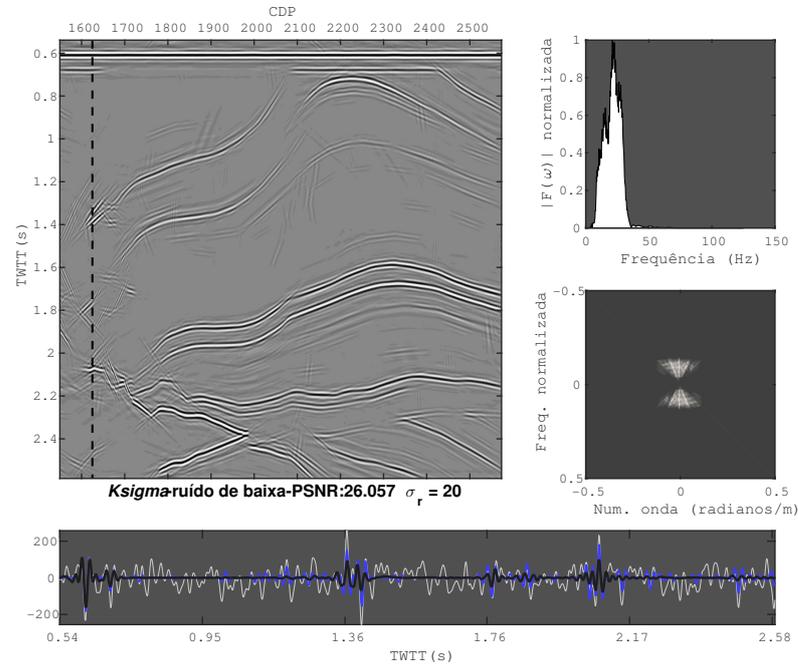
Desta forma, a fim de condicionar o dado à inversão acústica do traço, um refinamento dos resultados foi realizado. Para o caso do ruído Gaussiano $\sigma_r = 20$ de baixa frequência, responsável pelos piores resultados nas sub-seções anteriores, as figuras 88, 91, 90, 91, 92, 93, 96, 97, 96, 97, 98 e 99, mostram o produto do refinamento.

Em geral, os artefatos são significativamente atenuados, tornando-se quase que imperceptíveis nas seções finais. Por sua vez, a PSNR é reduzida, visto que o refinamento nada mais é, que um truncamento abrupto com base no espectro F-K.

Conicionados os dados, realizou-se a inversão. As tabelas 3, 4, 7 e 8, mostram os resultados para os traços 76 e 350 (relativos aos cdps 1625 e 1899, respectivamente) do Marmousi, e as 5, 6, 9 e 10, para os traços 156 e 450 (respectivamente relativos aos cdps 360.6654 e 475.7339, não inteiros devido à reamostragem horizontal realizada) do Marimba.

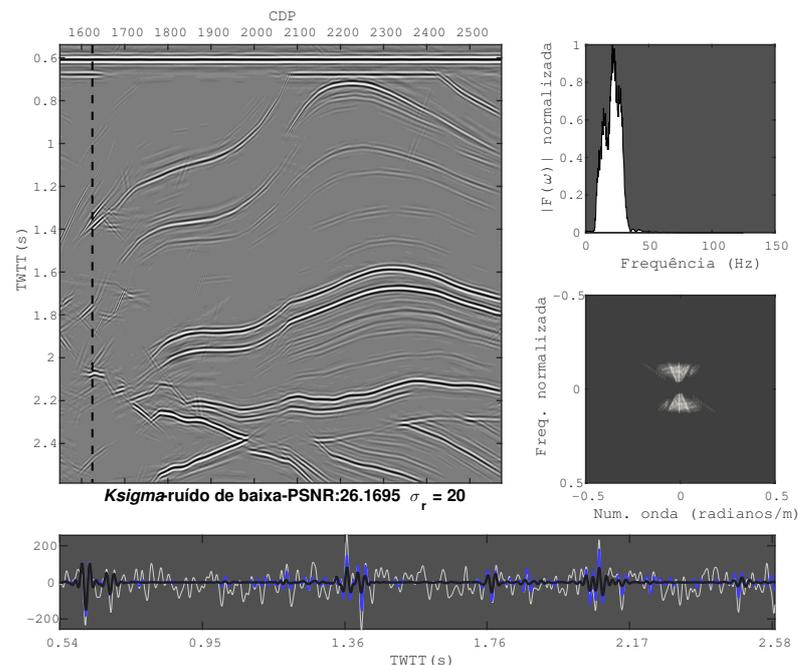
Os valores tabelados, equivalem à razão das energias da diferença entre os modelos de referência e estimado, e a energia do primeiro. É comum utilizar a norma da diferença entre os traços sísmicos, calculado e observado, como métrica quantitativa na inversão, no

Figura 88 – Refinamento da seção 47a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).



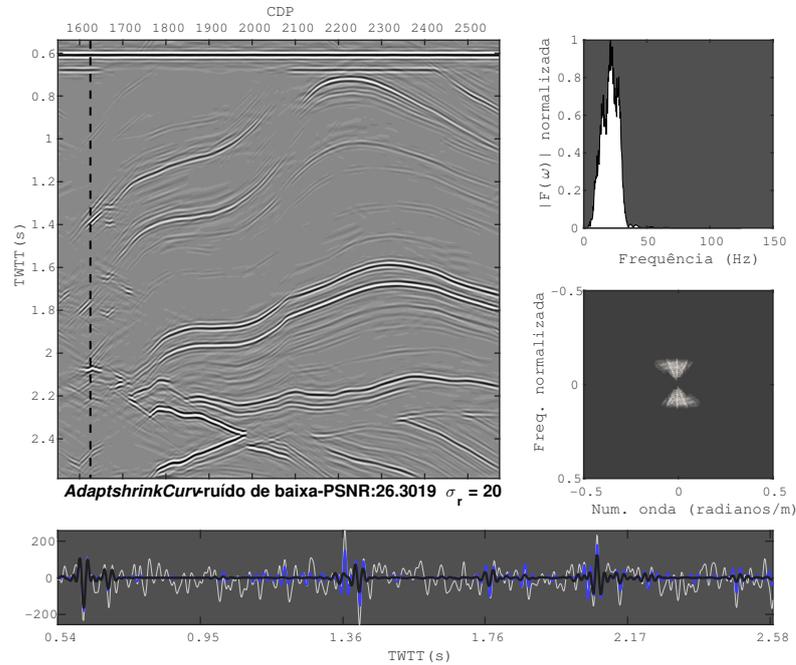
Fonte: O autor.

Figura 89 – Refinamento da seção 61a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).



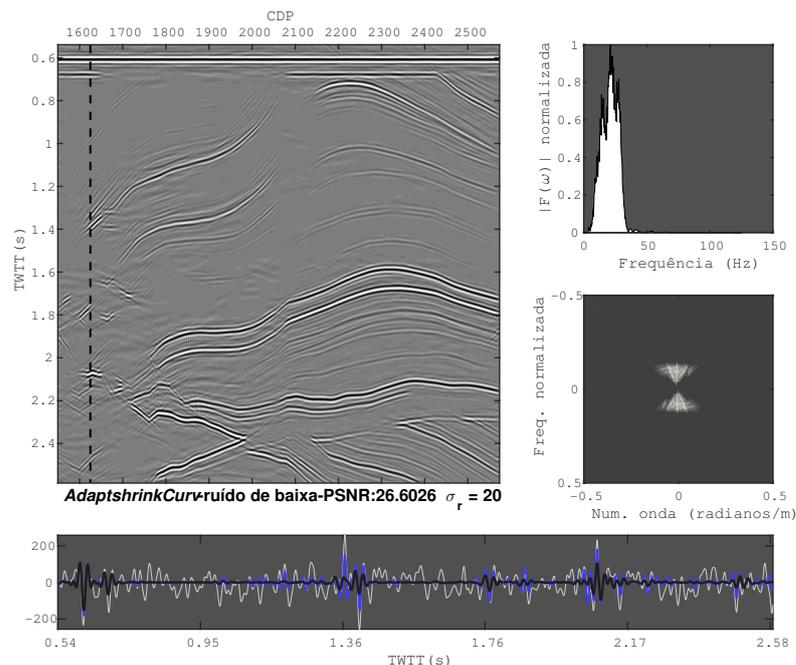
Fonte: O autor.

Figura 90 – Refinamento da seção 47c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).



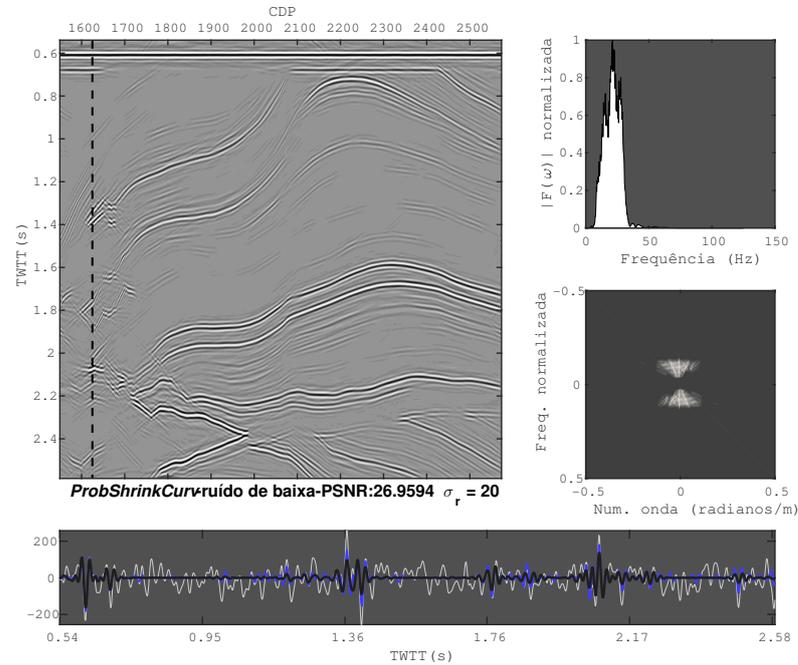
Fonte: O autor.

Figura 91 – Refinamento da seção 61c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).



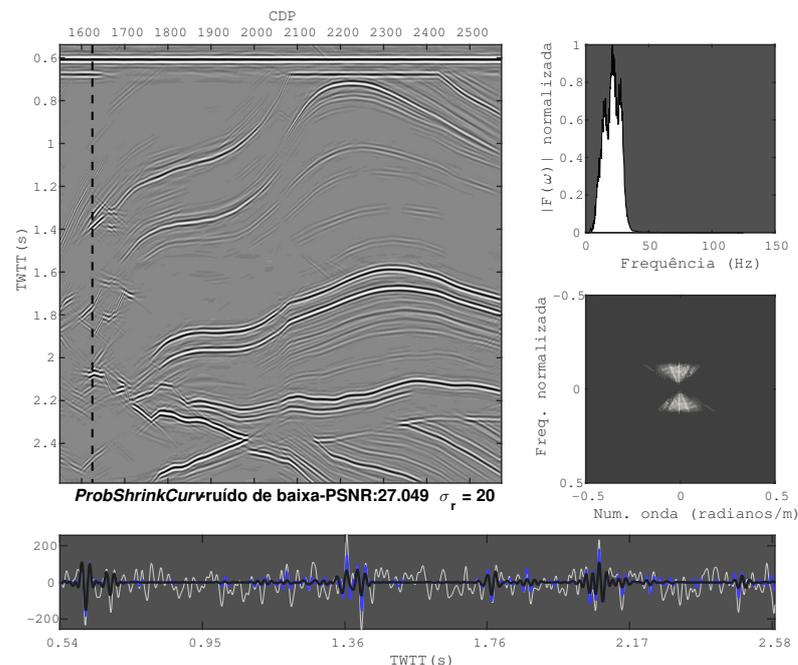
Fonte: O autor.

Figura 92 – Refinamento da seção 77a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).



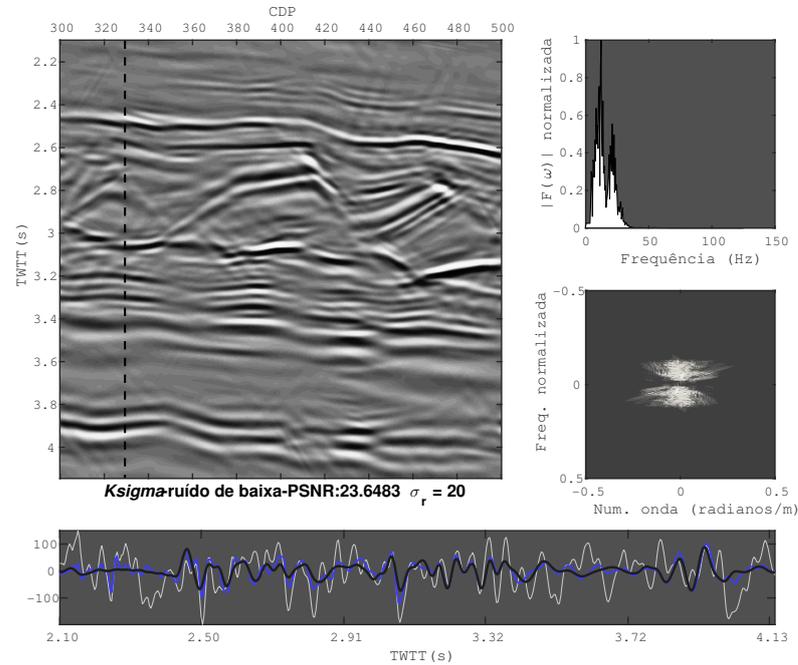
Fonte: O autor.

Figura 93 – Refinamento da seção 83a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).



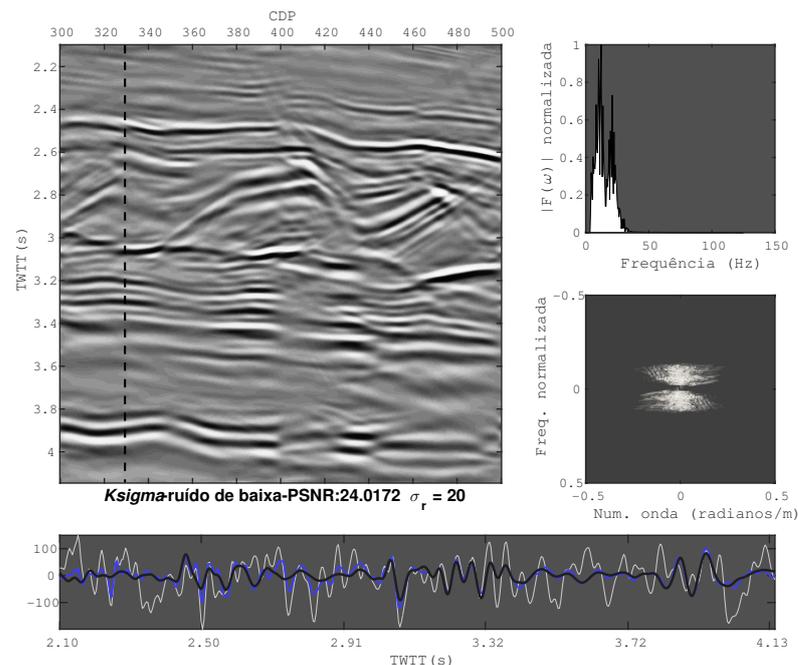
Fonte: O autor.

Figura 94 – Refinamento da seção 53a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).



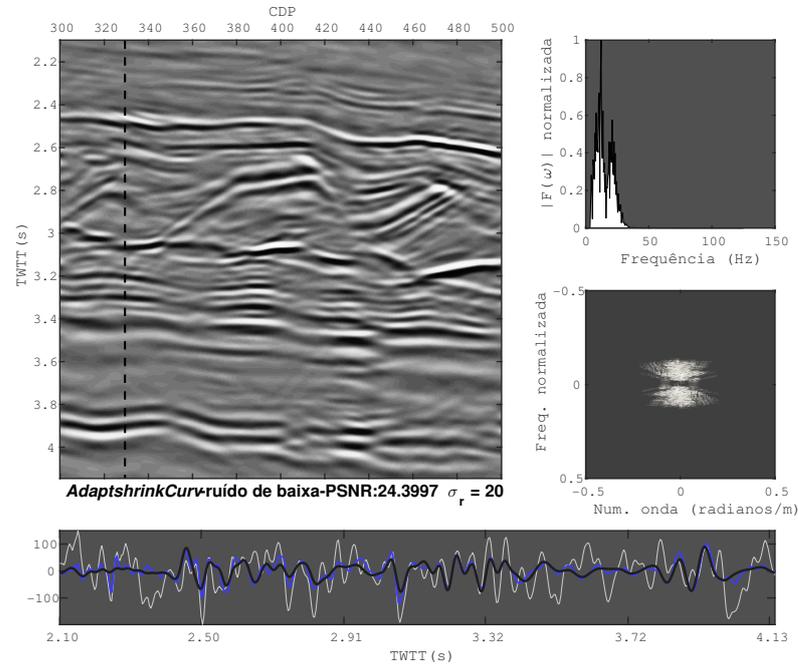
Fonte: O autor.

Figura 95 – Refinamento da seção 64a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).



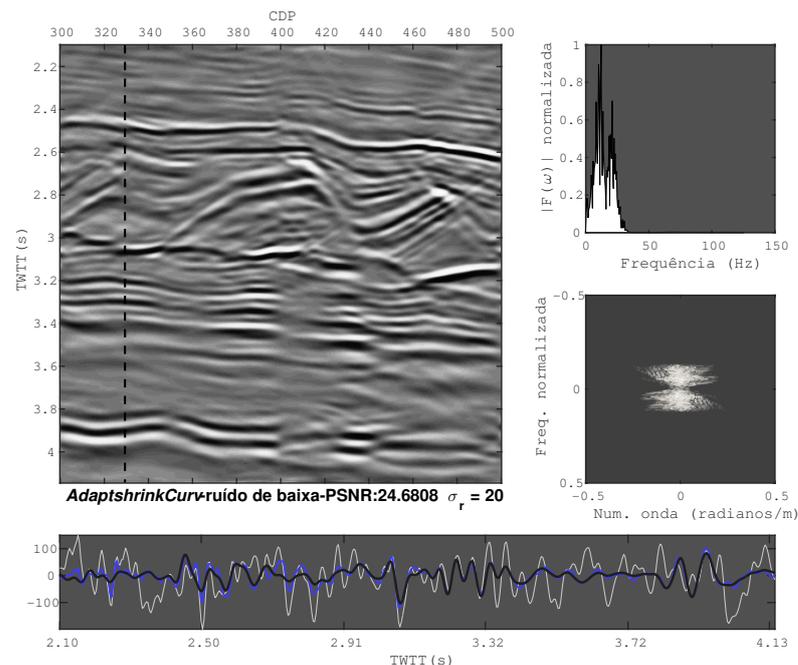
Fonte: O autor.

Figura 96 – Refinamento da seção 53c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).



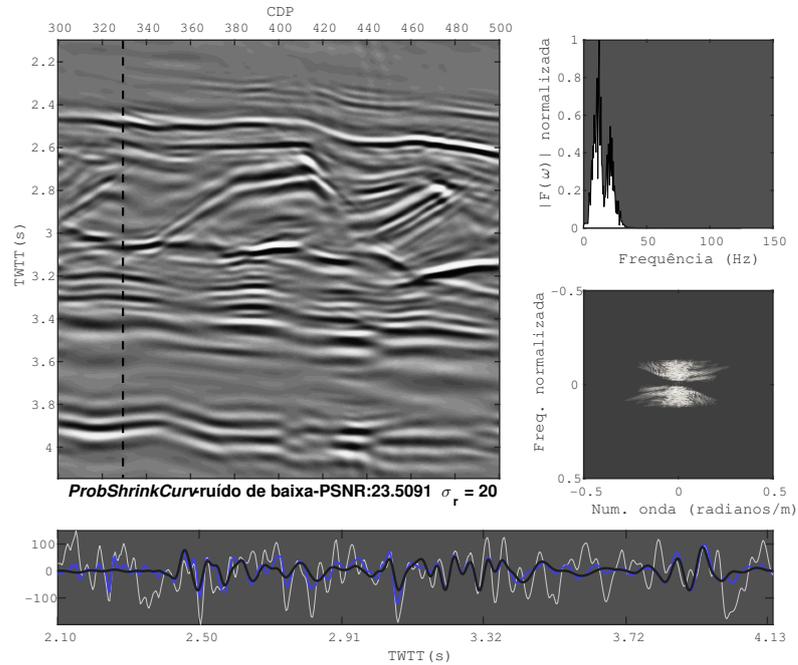
Fonte: O autor.

Figura 97 – Refinamento da seção 64c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).



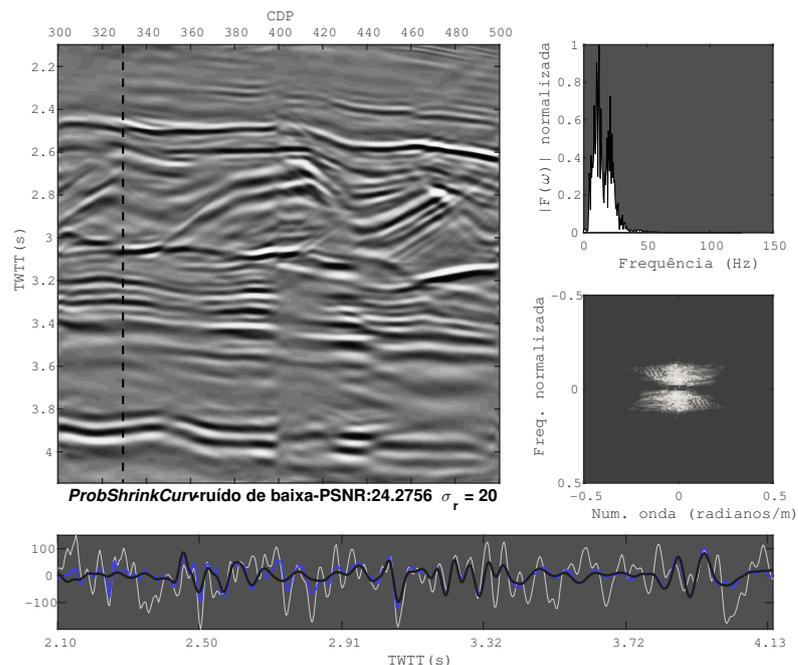
Fonte: O autor.

Figura 98 – Refinamento da seção 80a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).



Fonte: O autor.

Figura 99 – Refinamento da seção 86a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 76 (cdp 1625) em preto e suas respectivas versões: corrompida (branco) e original (azul).



Fonte: O autor.

entanto optou-se por outro critério, a fim de evitar o super ajuste (*overfitting*), quando tal medida torna-se enviesada.

De fato, a análise da norma L^2 do erro nas inversões, foi inconclusiva, principalmente para a inversão GLI, quando situações de super ajuste foram mais recorrentes, em parte devido à parametrização do modelo, inerente ao método. Buscando evitar tais situações, muitas vezes o número de iterações foi reduzido, o que aumenta a norma L^2 do erro mas garante um modelo mais consistente.

Entre as 144 inversões com resultados apresentados nas tabelas, o *AdaptShrinkCurv* foi melhor em 26, o *ProbShrinkCurv* em 22 e o *ksigma* em 20. Nas figuras 100, 101, 102 e 103, são comparados os resultados das três metodologias considerando ruído de baixa e de alta, para os cdps 1625 e 1899 dos Marmousi, respectivamente. A análise detalhada destas, confirma o *AdaptShrinkCurv* como o que permitiu estimativa de um modelo mais próximo ao original (Modelo sem ruído nas figuras).

Um detalhe que deve ser comentado, principalmente para os familiares com o Marmousi-2 (MARTIN, 2004), é que a presença de *ghosts* no dado introduz altas frequências, de forma que o modelo estimado, considerando a seção sem ruído, possui variações abruptas de impedância, não representativas do Marmousi original. Ainda assim, a título de comparação de metodologias para pré-condicionamento, sua utilização continua válida.

Figuras 104, 105, 106 e 107 comparam as estimativas pós-condicionamento, para os casos dos ruídos de alta e baixa, respectivamente para os traços 156 e 450 do Marimba. Nestas, as três metodologias permitem estimativa de modelos consistentes. A exceção é o modelo estimado com dado filtrado pelo *ProbShrinkCurv* em 107, onde o super ajuste leva a uma estimativa com artefatos oscilatórios. A limitação do número de iterações garantiria, para este caso, impedâncias mais consistentes

Por fim, ainda que o *AdaptShrinkCurv* tenha obtido resultados quantitativamente superiores, o produto de todas as inversões foram próximos ao referencial. A introdução de regularização e a parametrização nos algoritmos de inversão, em geral, é responsável por estabilizar a solução, garantindo boa performance contanto que o nível de ruído presente seja baixo. Uma vez que as três técnicas de filtragem discutidas foram capazes de atenuar a maior parte do ruído, compreende-se as aproximações coerentes obtidas.

Figura 100 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens na seção Marmousi completa. Os traços 76 e 350 equivalem aos cdps 1625 e 1899, respectivamente.

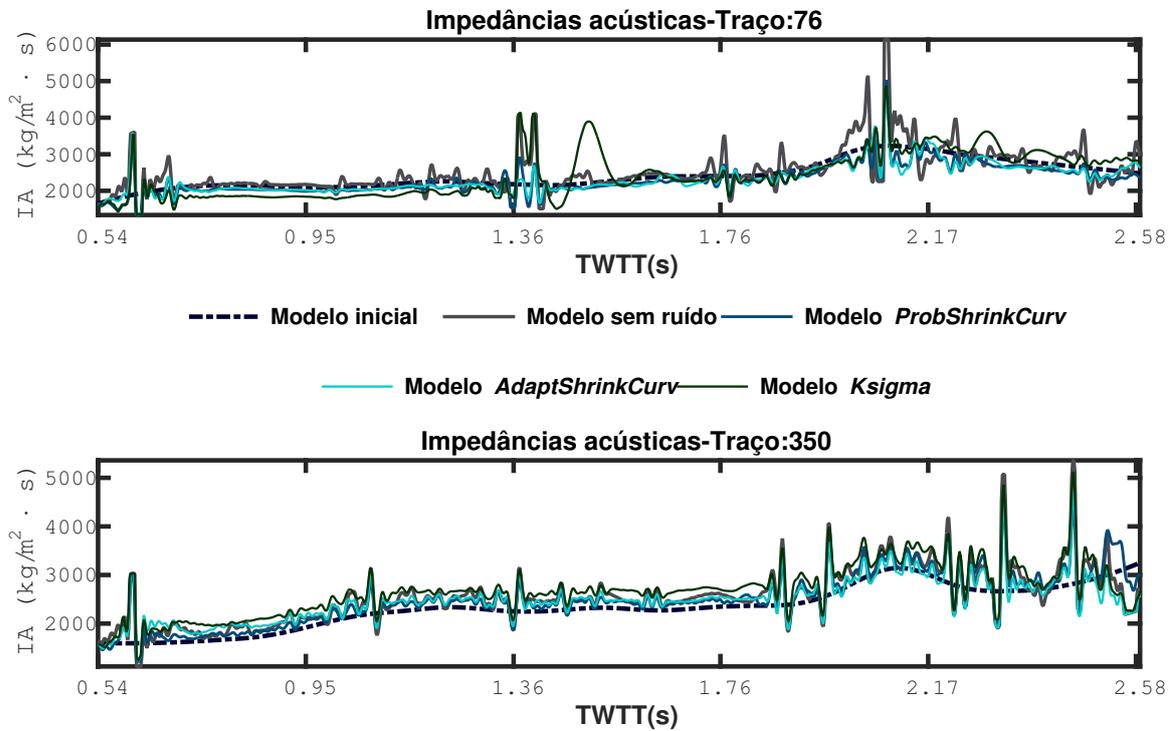


Figura 101 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do Marmousi. Os traços 76 e 350 equivalem aos cdps 1625 e 1899, respectivamente.

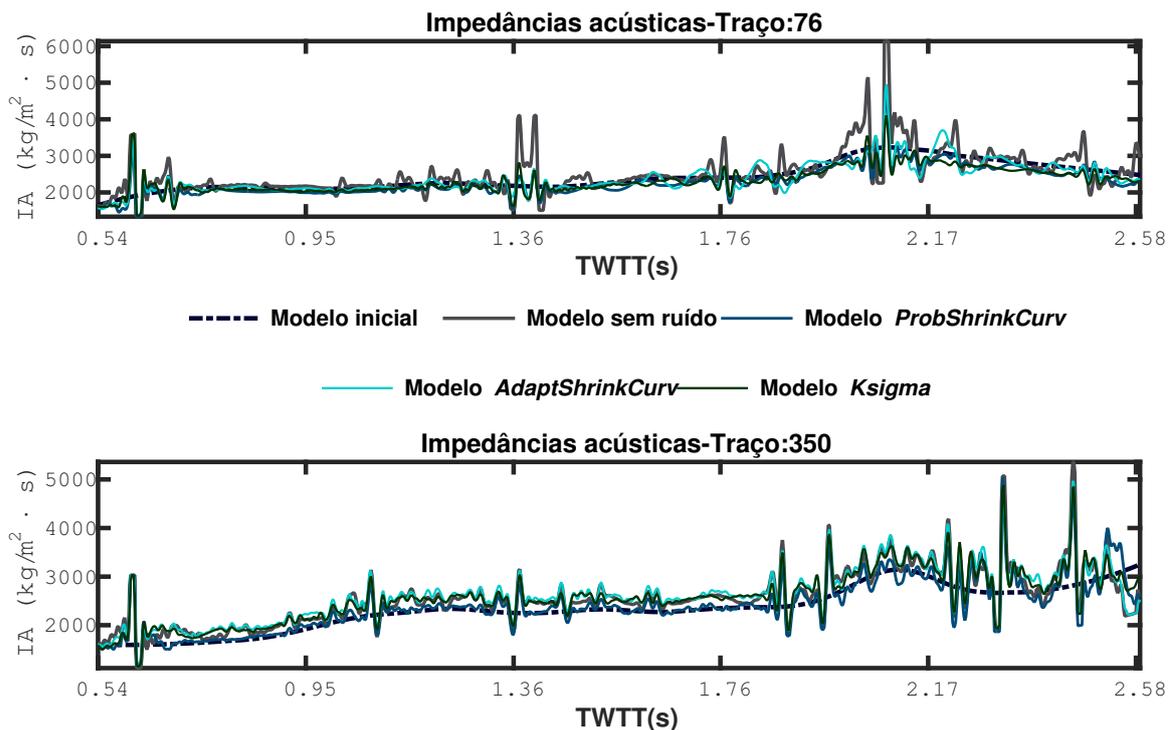


Figura 102 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens na seção Marmousi completa. Os traços 76 e 350 equivalem aos cdps 1625 e 1899, respectivamente.

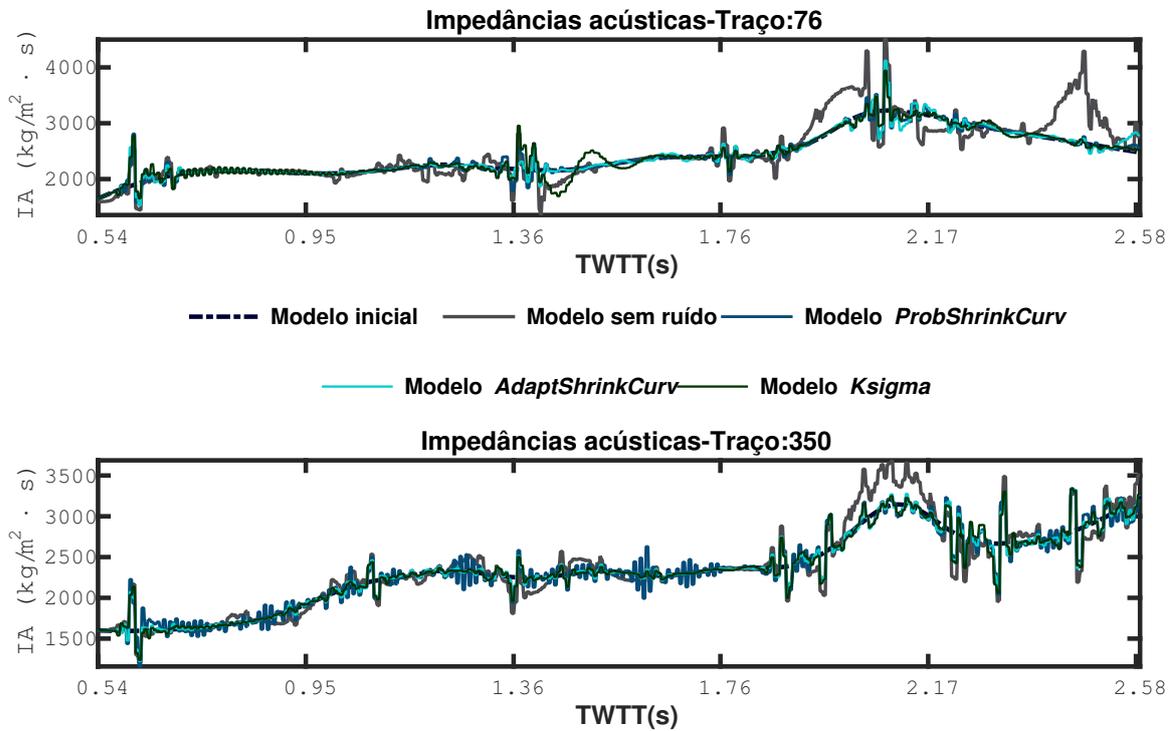


Figura 103 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do Marmousi. Os traços 76 e 350 equivalem aos cdps 1625 e 1899, respectivamente.

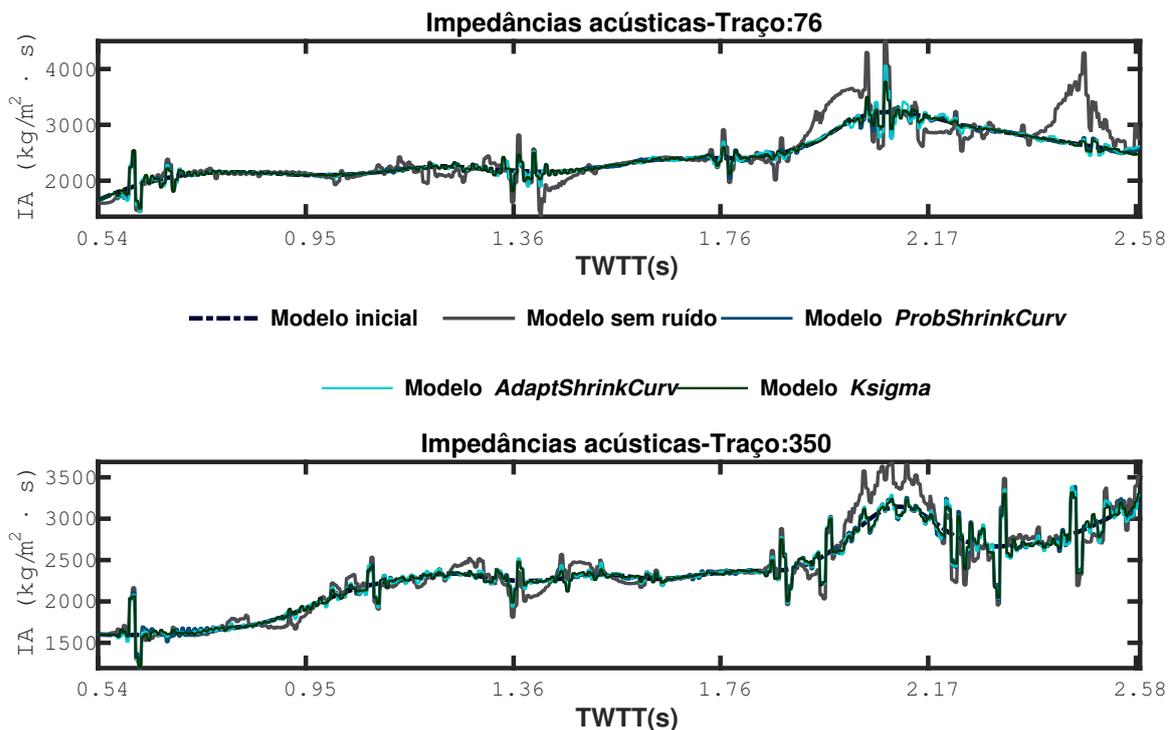


Figura 104 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens na seção Marimba completa. Os traços 156 e 450 equivalem aos cdps 360.6654 e 475.7339, respectivamente.

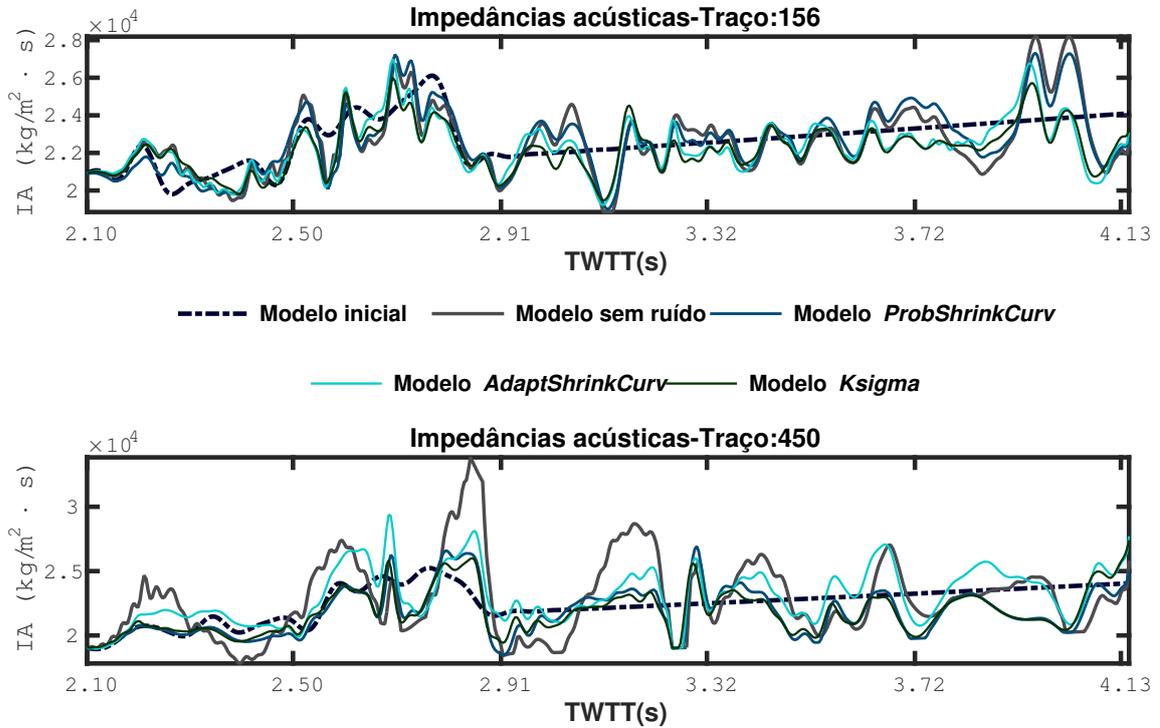


Figura 105 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do Marimba. Os traços 156 e 450 equivalem aos cdps 360.6654 e 475.7339, respectivamente.

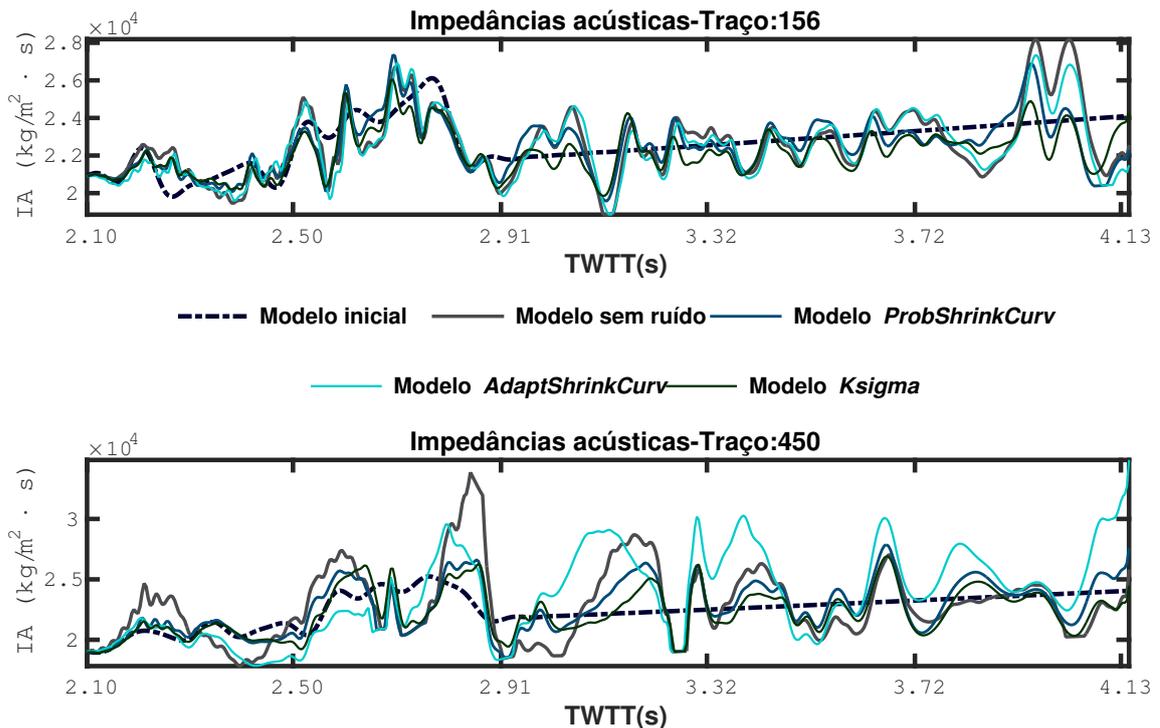


Figura 106 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens na seção Marimba completa. Os traços 156 e 450 equivalem aos cdps 360.6654 e 475.7339, respectivamente.

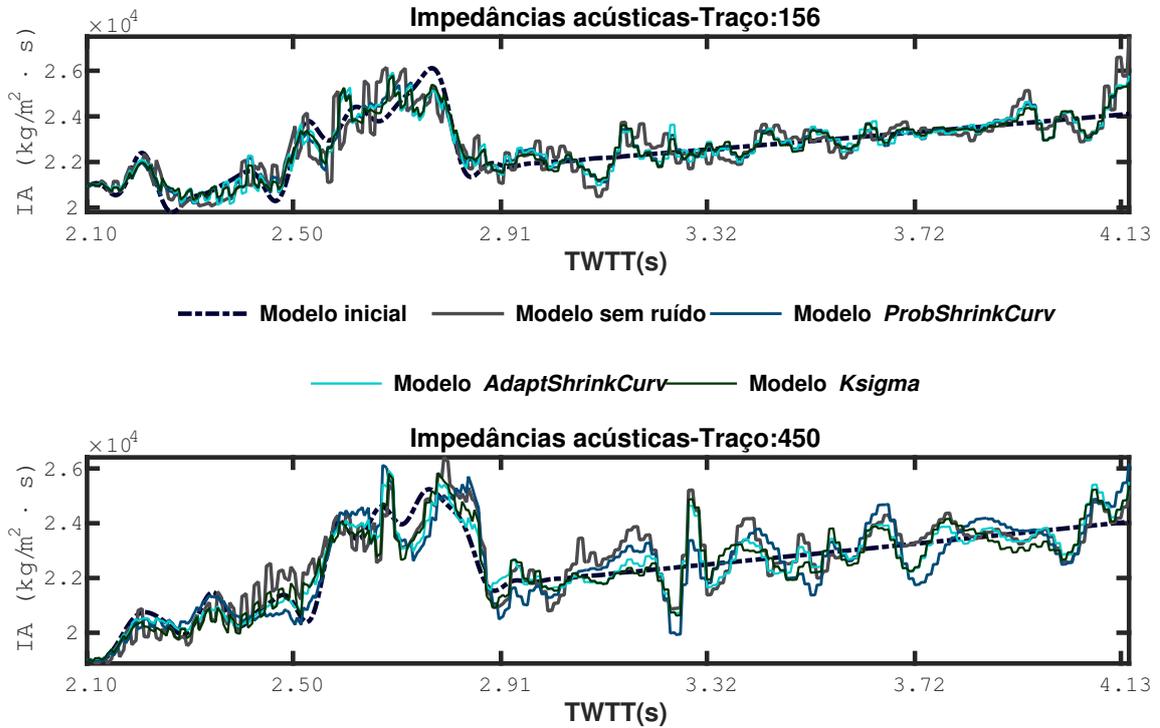


Figura 107 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do Marimba. Os traços 156 e 450 equivalem aos cdps 360.6654 e 475.7339, respectivamente.

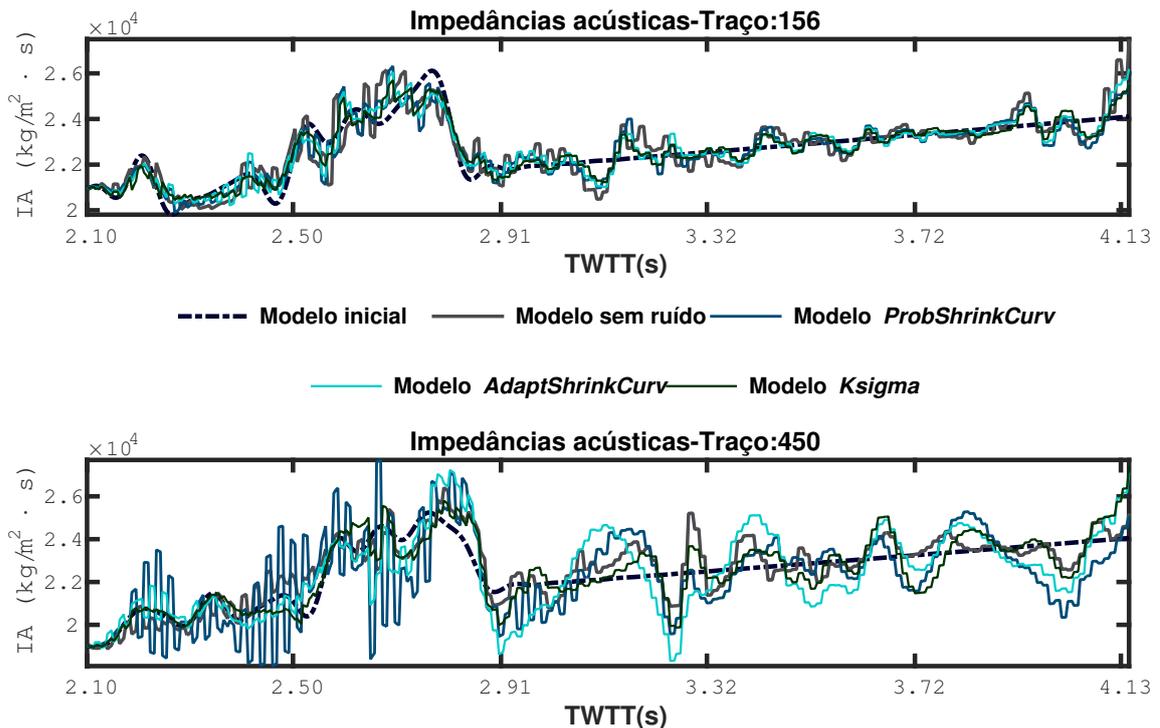


Tabela 3 – Razão entre a energia do erro na impedância estimada e a energia total do modelo de referência. Os traços 76 e 350 são referentes ao Marmousi e os resultados da filtragem na seção completa corrompida por ruído $\sigma_r = 20$. O método de inversão foi o GLI.

Ruído $\sigma_r = 20$	Traços					
	Branco	76 Alta	Baixa	Branco	350 Alta	Baixa
<i>ksigma</i>	0.0033	0.0019	0.0033	0.0019	0.0036	0.0021
<i>Adapt</i>	0.0034	0.0019	0.0034	0.0018	0.0035	0.0020
<i>Prob</i>	0.0033	0.0021	0.0033	0.0022	0.0034	0.0020

Fonte – O autor

Tabela 4 – Razão entre a energia do erro na impedância estimada e a energia total do modelo de referência. Os traços 76 e 350 são referentes ao Marmousi e os resultados da filtragem realizada, individualmente, no marm1, marm2, marm3 e marm4, corrompidos por ruído $\sigma_r = 20$. O método de inversão foi o GLI.

Ruído $\sigma_r = 20$	Traços					
	Branco	76 Alta	Baixa	Branco	350 Alta	Baixa
<i>ksigma</i>	0.0033	0.0019	0.0032	0.0018	0.0034	0.0020
<i>Adapt</i>	0.0033	0.0019	0.0032	0.0018	0.0034	0.0020
<i>Prob</i>	0.0033	0.0019	0.0033	0.0019	0.0034	0.0021

Fonte – O autor

Tabela 5 – Razão entre a energia do erro na impedância estimada e a energia total do modelo de referência. Os traços 156 e 450 são referentes ao Marimba e os resultados da filtragem na seção completa corrompida por ruído $\sigma_r = 20$. O método de inversão foi o GLI.

Ruído $\sigma_r = 20$	Traços					
	Branco	156 Alta	Baixa	Branco	450 Alta	Baixa
<i>ksigma</i>	0.0012	0.0010	0.0012	0.0007	0.0012	0.0011
<i>Adapt</i>	0.0013	0.0017	0.0012	0.0024	0.0011	0.0011
<i>Prob</i>	0.0013	0.0007	0.0012	0.0007	0.0012	0.0014

Fonte – O autor

Tabela 6 – Razão entre a energia do erro na impedância estimada e a energia total do modelo de referência. Os traços 156 e 450 são referentes ao Marimba e os resultados da filtragem realizada, individualmente, no marim1, marim2, marim3 e marim4, corrompidos por ruído $\sigma_r = 20$. O método de inversão foi o GLI.

Ruído $\sigma_r = 20$	Traços						
	Branco	156 Alta	Baixa		Branco	450 Alta	Baixa
<i>ksigma</i>	0.0012	0.0014	0.0011		0.0014	0.0011	0.0015
<i>Adapt</i>	0.0011	0.0018	0.0012		0.0023	0.0013	0.0023
<i>Prob</i>	0.0019	0.0040	0.0012		0.0017	0.0011	0.0028

Fonte – O autor

Tabela 7 – Razão entre a energia do erro na impedância estimada e a energia total do modelo de referência. Os traços 76 e 350 são referentes ao Marmousi e os resultados da filtragem na seção completa corrompida por ruído $\sigma_r = 20$. O método de inversão foi o Bayes.

Ruído $\sigma_r = 20$	Traços						
	Branco	76 Alta	Baixa		Branco	350 Alta	Baixa
<i>ksigma</i>	0.0039	0.0028	0.0038		0.0023	0.0059	0.0031
<i>Adapt</i>	0.0039	0.0030	0.0037		0.0022	0.0053	0.0033
<i>Prob</i>	0.0038	0.0025	0.0037		0.0026	0.0050	0.0028

Fonte – O autor

Tabela 8 – Razão entre a energia do erro na impedância estimada e a energia total do modelo de referência. Os traços 76 e 350 são referentes ao Marmousi e os resultados da filtragem realizada, individualmente, no marm1, marm2, marm3 e marm4, corrompidos por ruído $\sigma_r = 20$. O método de inversão foi o Bayes.

Ruído $\sigma_r = 20$	Traços						
	Branco	76 Alta	Baixa		Branco	350 Alta	Baixa
<i>ksigma</i>	0.0043	0.0029	0.0036		0.0018	0.0051	0.0043
<i>Adapt</i>	0.0037	0.0035	0.0034		0.0017	0.0049	0.0034
<i>Prob</i>	0.0030	0.0030	0.0034		0.0031	0.0050	0.0035

Fonte – O autor

Tabela 9 – Razão entre a energia do erro na impedância estimada e a energia total do modelo de referência. Os traços 156 e 450 são referentes ao Marimba e os resultados da filtragem na seção completa corrompida por ruído $\sigma_r = 20$. O método de inversão foi o Bayes.

Ruído $\sigma_r = 20$	Traços						
	Branco	156 Alta	Baixa		Branco	450 Alta	Baixa
<i>ksigma</i>	0.0022	0.0049	0.0022		0.0029	0.0025	0.0048
<i>Adapt</i>	0.0022	0.0030	0.0022		0.0024	0.0029	0.0040
<i>Prob</i>	0.0024	0.0023	0.0010		0.0025	0.0027	0.0045

Fonte – O autor

Tabela 10 – Razão entre a energia do erro na impedância estimada e a energia total do modelo de referência. Os traços 156 e 450 são referentes ao Marimba e os resultados da filtragem realizada, individualmente, no marim1, marim2, marim3 e marim4, corrompidos por ruído $\sigma_r = 20$. O método de inversão foi o Bayes.

Ruído $\sigma_r = 20$	Traços						
	Branco	156 Alta	Baixa		Branco	450 Alta	Baixa
<i>ksigma</i>	0.0024	0.0042	0.0024		0.0036	0.0027	0.0040
<i>Adapt</i>	0.0021	0.0034	0.0010		0.0020	0.0020	0.0062
<i>Prob</i>	0.0031	0.0026	0.0020		0.0026	0.0029	0.0035

Fonte – O autor

5.2 Experimentos com dados reais

Nesta seção tratam-se os resultados obtidos com os dados reais Realland (10), USGSland (11) e USGSmar (12). O último, uma vez que possui grandes dimensões, foi particionado e somente os resultados associados à sua secção superior esquerda (figura 111), será discutida.

Para as três metodologias aqui discutidas, limites superior e inferior para o limiar de corte, foram previamente definidos. A filtragem é realizada para diversos valores, igualmente espaçados, entre os limites definidos. Toma-se como melhor, o valor, próximo à região central, cujas diferenças progressivas das PSNRs (em função do corte), somadas às respectivas diferenças das PSNRs revertidas horizontalmente, é menor. As figuras 108, 109 e 110, ilustram este procedimento para os casos de filtragem *ksigma* no Realland, *AdaptShrinkCurv* no USGSland e *ProbShrinkCurv* no USGSmar, respectivamente.

O valor buscado, marcará o ponto de inflexão representativo do melhor compromisso entre atenuação de ruído/preservação do sinal. A justificativa para o processo descrito, é que a partir deste *threshold*, o decaimento das PSNRs possui comportamento aproximadamente monotônico (ou com variação relativamente menor que para valores inferiores ao escolhido).

As sub-seções seguintes seguem a mesma organização da seção anterior. Inicialmente trata-se a atenuação com metodologias da abordagem 1, em sequência, com o *ProbShrinkCurv* e por fim discute-se o refinamento e a inversão.

Figura 108 – Exemplo da seleção do nível de corte, para filtragem *ksigma* no Realland. (a) é a variação da PSNR com o corte. (b): tracejado claro - diferenças progressivas de (a) espelhado em relação ao eixo das ordenadas; tracejado escuro - diferenças progressivas de (a); linha sólida - soma das anteriores.

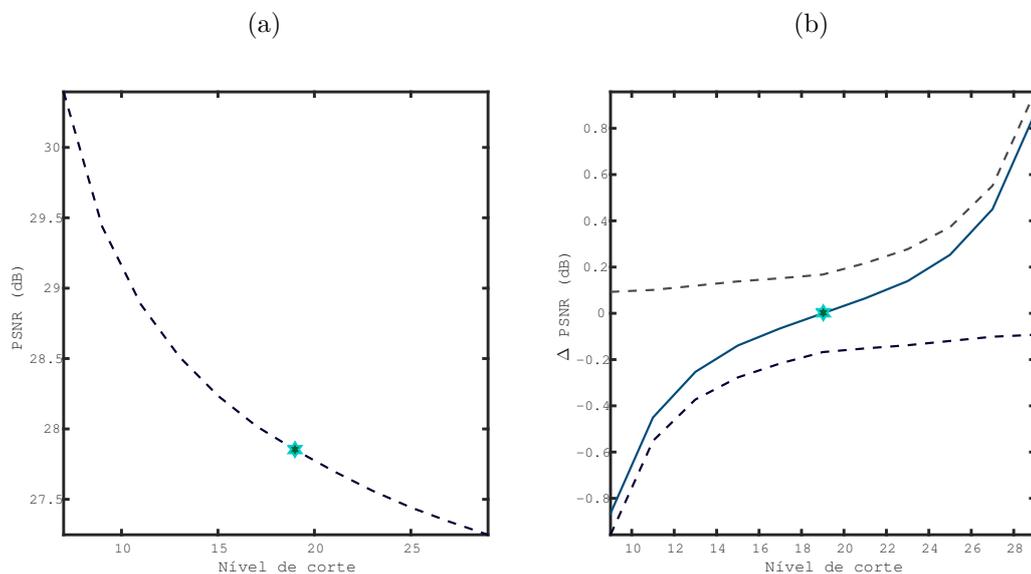


Figura 109 – Exemplo da seleção do nível de corte, para filtragem *AdaptSheinkCurv* no USGSland. Gráficos possuem a mesma representação da figura anterior 108.

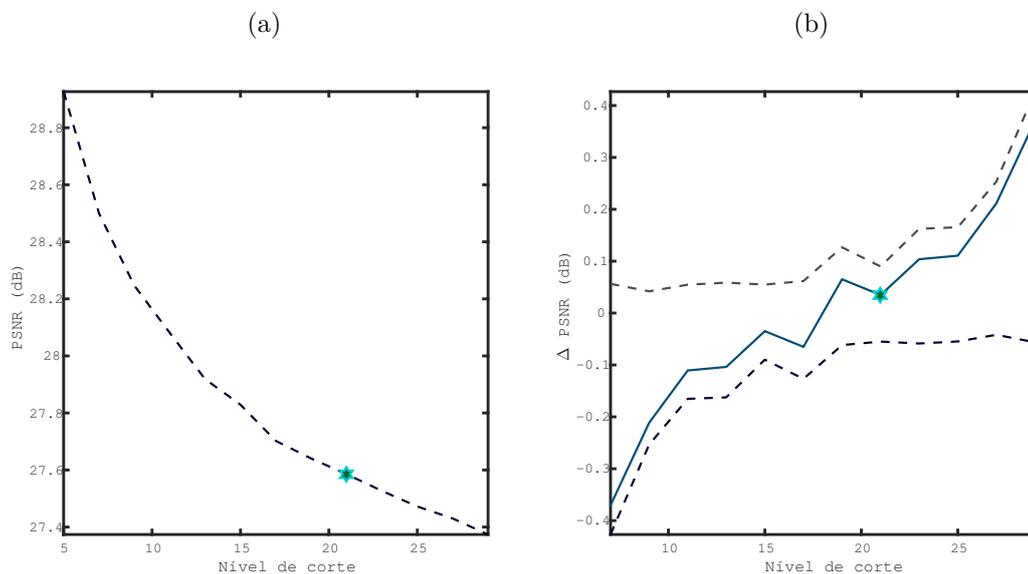


Figura 110 – Exemplo da seleção do nível de corte, para filtragem *ProbShrinkCurv* no Realland. Gráficos possuem a mesma representação das figuras anteriores: 108 e 109.

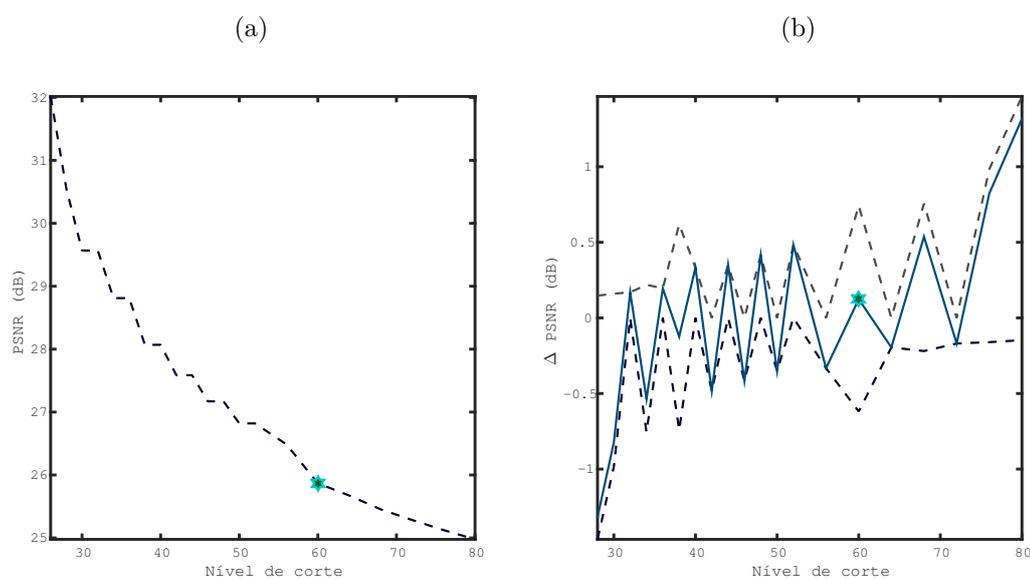
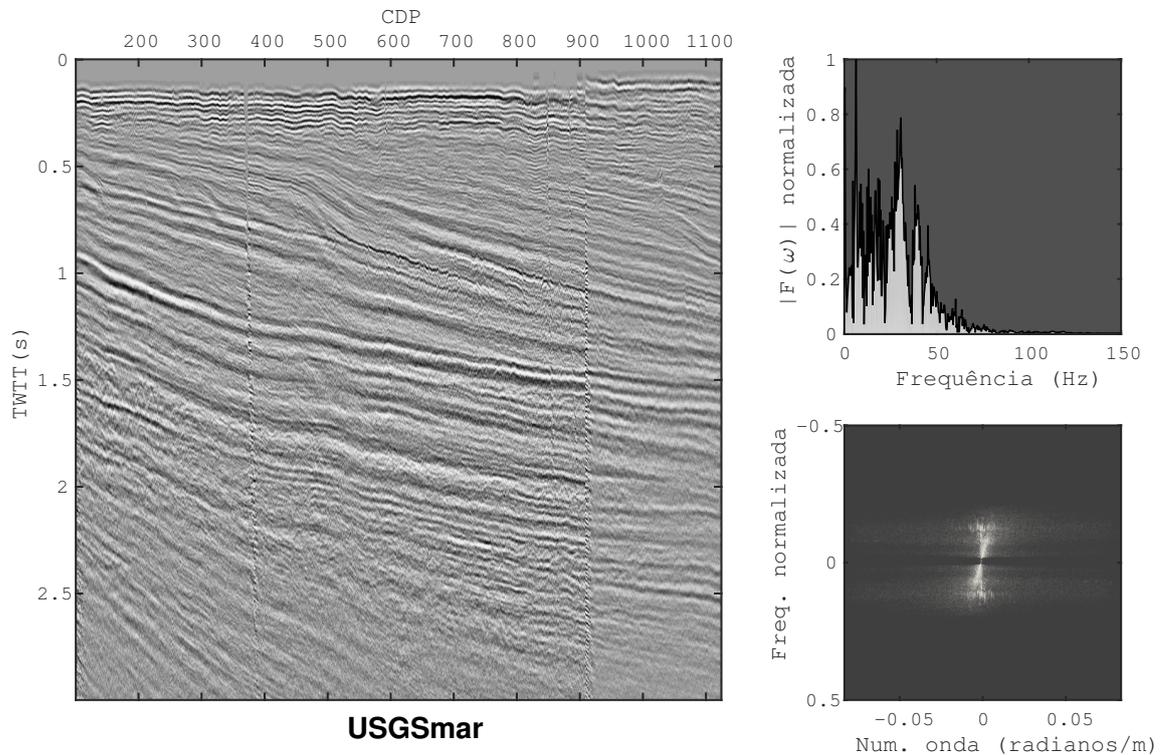


Figura 111 – Parte superior esquerda da seção USGSmar na figura 12 Também são mostrados seus espectro de amplitude e F-K.



Fonte: O autor.

5.2.1 Abordagem 1

A discussão nesta, se dá de forma análoga à em 5.1.1. Inicialmente tratou-se a seção completa, em seguida, realizou-se filtragem em partições, as quais subsequentemente, foram concatenadas para restaurar a imagem original.

Um detalhe inicial à discussão, que deve ser pontuado, é relativo aos mapas SSIM. Na seção anterior, buscavam-se similaridades, na presente, analisam-se as regiões dissimilares, onde a atenuação do ruído implica diferença de estruturas locais.

Considerando o Realland, as figuras 112 e 115 mostram os resultados da atenuação na seção completa e realizado em seções, respectivamente. Para as duas situações, um artefato horizontal em $\sim 1s$, associado à concatenação, torna-se evidente. Ainda assim, para todos os casos, o ruído é atenuado quase que completamente, apesar dos artefatos direcionais residuais. Os mapas SSIM indicam maior dissimilaridade na parte superior das seções, uma vez que é onde concentra-se sinal. A região abaixo de $\sim 0.5s$ é tratada como ruído e torna-se homogênea.

Os resultados do tratamento em partes e na seção completa, não evidenciou superioridade em uma situação específica, apesar do artefato horizontal discutido. Em

geral, o sinal é bem restaurado, possivelmente devido aos refletores da seção possuírem preferência de orientação (plano-paralelos), o que facilita a performance dos métodos.

Figuras 113 e 116 referem-se ao USGSland. A atenuação do ruído, em grande parte correlacionado e associado aos maiores números de onda (artefatos verticais), é clara. Principalmente na parte superior ($> \sim 2s$) e inferior ($< \sim 3s$), há maior continuidade de refletores. Mais uma vez, tratar o dado na íntegra ou em partes, não revela diferenças, exceto, obviamente, pelos artefatos de concatenação.

Quanto ao USGSmar, as imagens 114 e 117 apresentam os resultados. Por ser um dado marítimo, sua qualidade é, em geral, superior. Ainda assim, há presença de ruídos tanto nas altas quanto baixas frequências — destacam-se os artefatos verticais em 111. Em grande parte, devido à sua maior razão sinal-ruído, pode-se afirmar, que entre os dados reais, este foi o que levou a melhores resultados. Tanto para a filtragem em partes quanto na seção completa, o sinal foi muito bem recuperado. Mesmo os artefatos verticais foram, em sua maior parte, removidos.

Por fim, discute-se que o *AdaptShrinkCurv* é responsável pelos melhores resultados apresentados nesta sub-seção. Para todos os casos, este demonstrou maior capacidade em distinguir sinal e ruído, ainda que para o USGSland seja difícil diferenciar. Tal comportamento é esperado, considerando que a maior parte dos ruídos presente é correlacionado.

Figura 112 – Remoção de ruídos na seção Realland (10) utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c). Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).

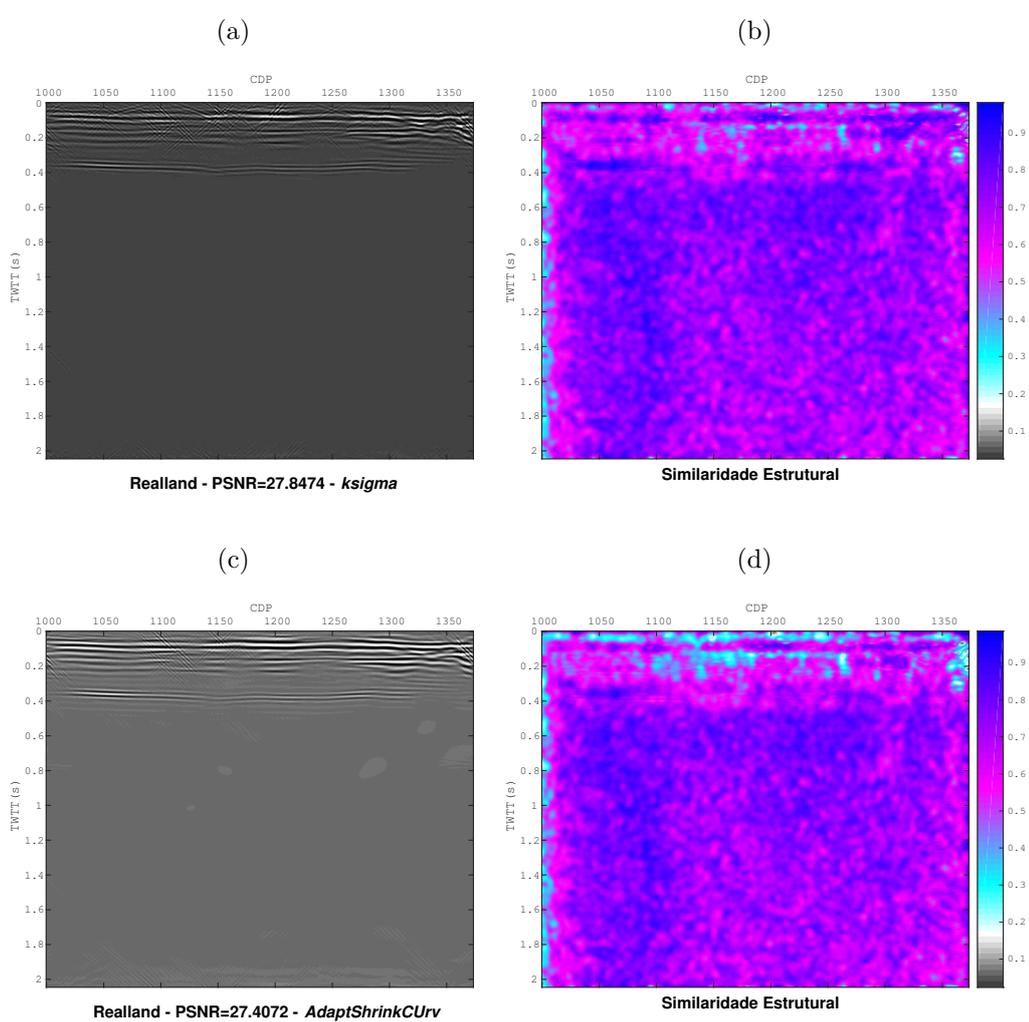


Figura 113 – Remoção de ruídos na seção USGSland (11) utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c). Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).

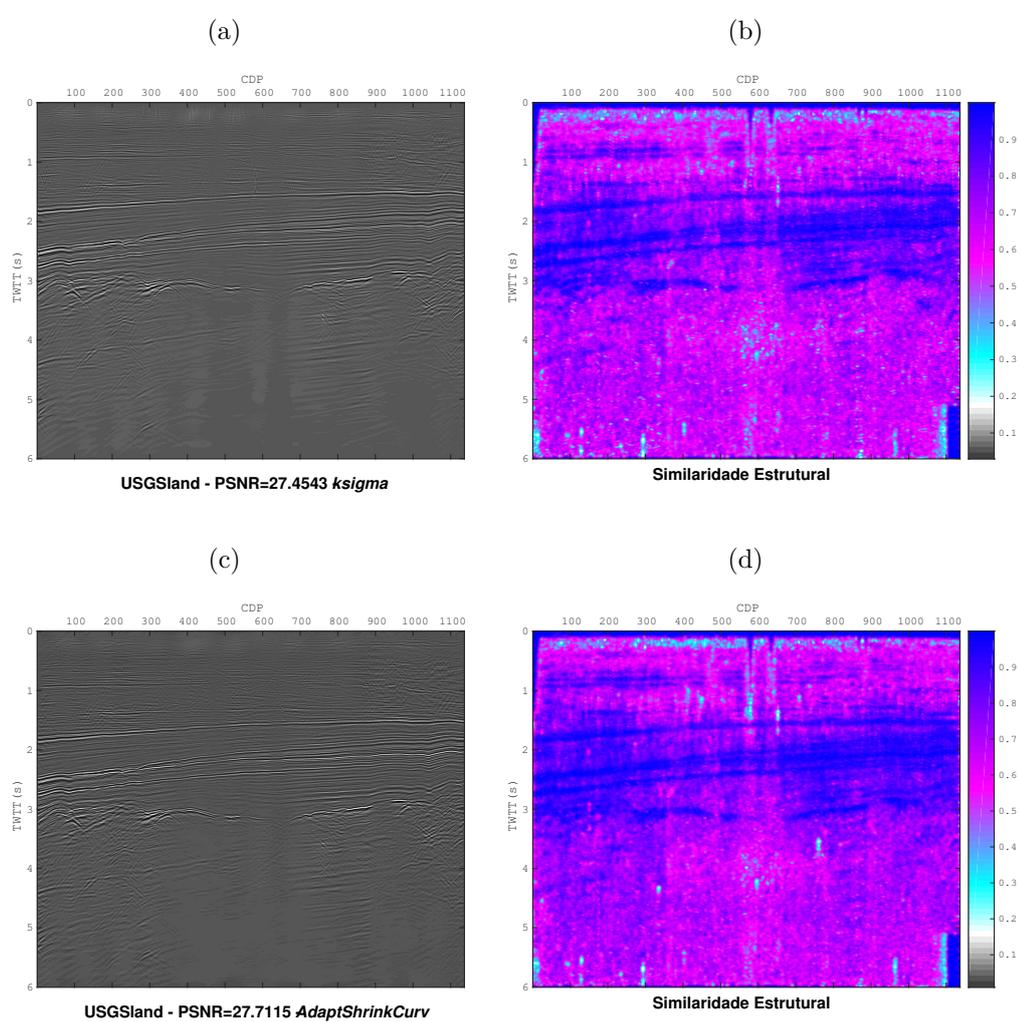


Figura 114 – Remoção de ruídos na seção USGSmar (111) utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c). Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).

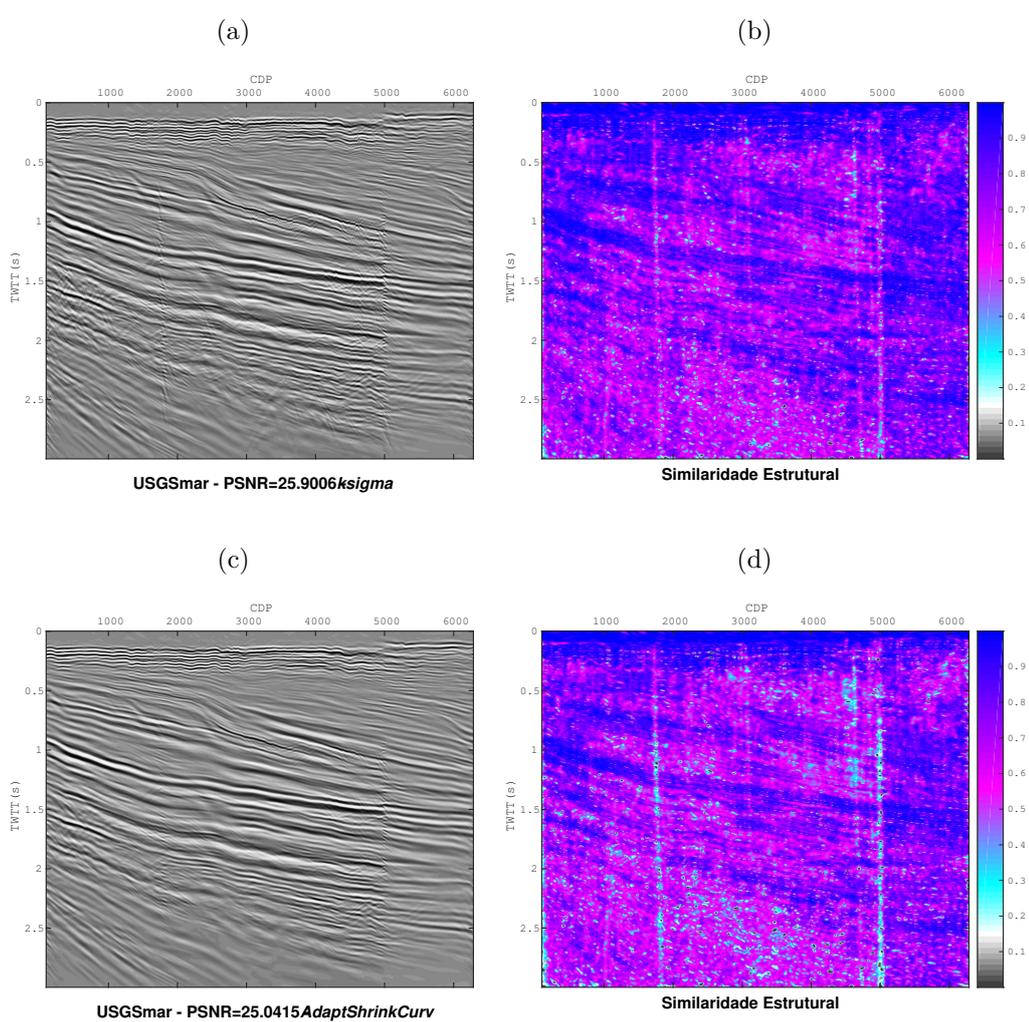


Figura 115 – Remoção de ruídos na seção Realland (10) utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c), aplicados individualmente às suas partições. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).

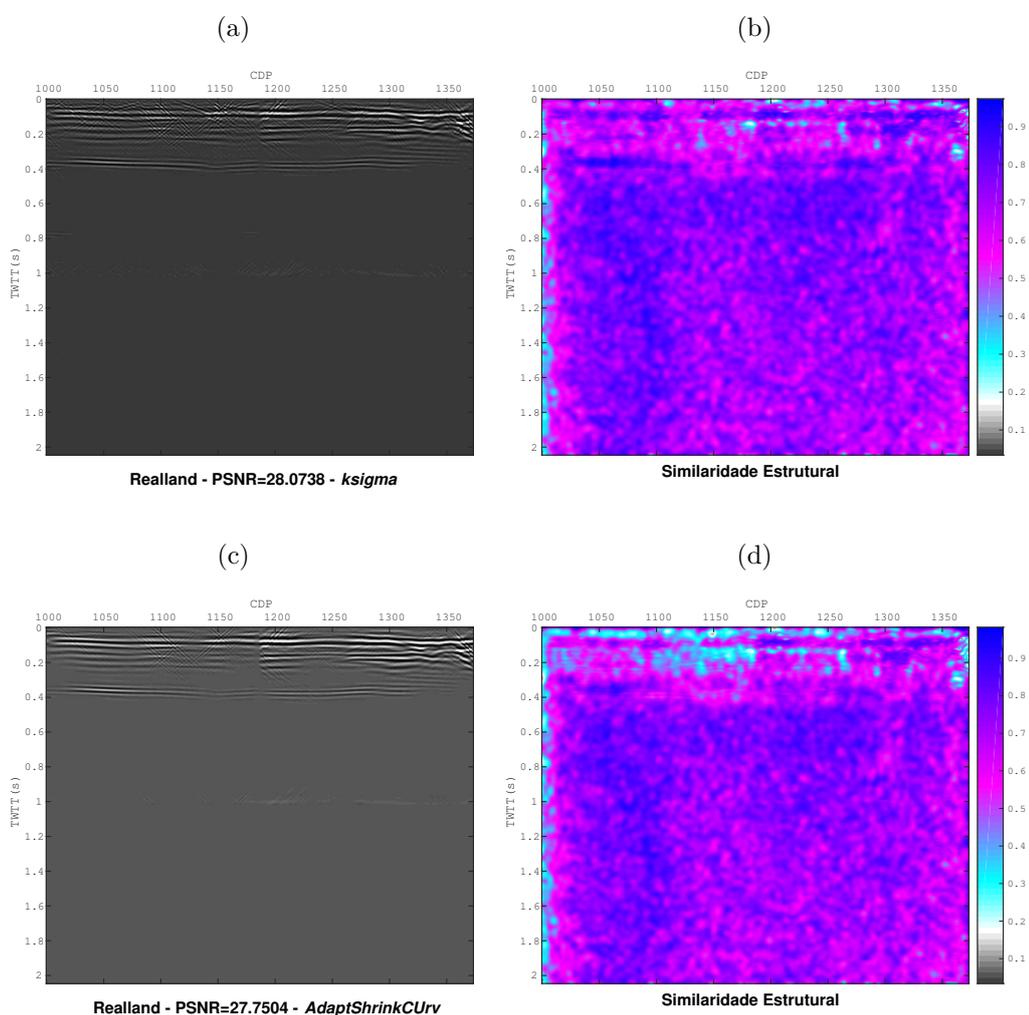


Figura 116 – Remoção de ruídos na seção USGSland (11) utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c), aplicados individualmente às suas partições. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).

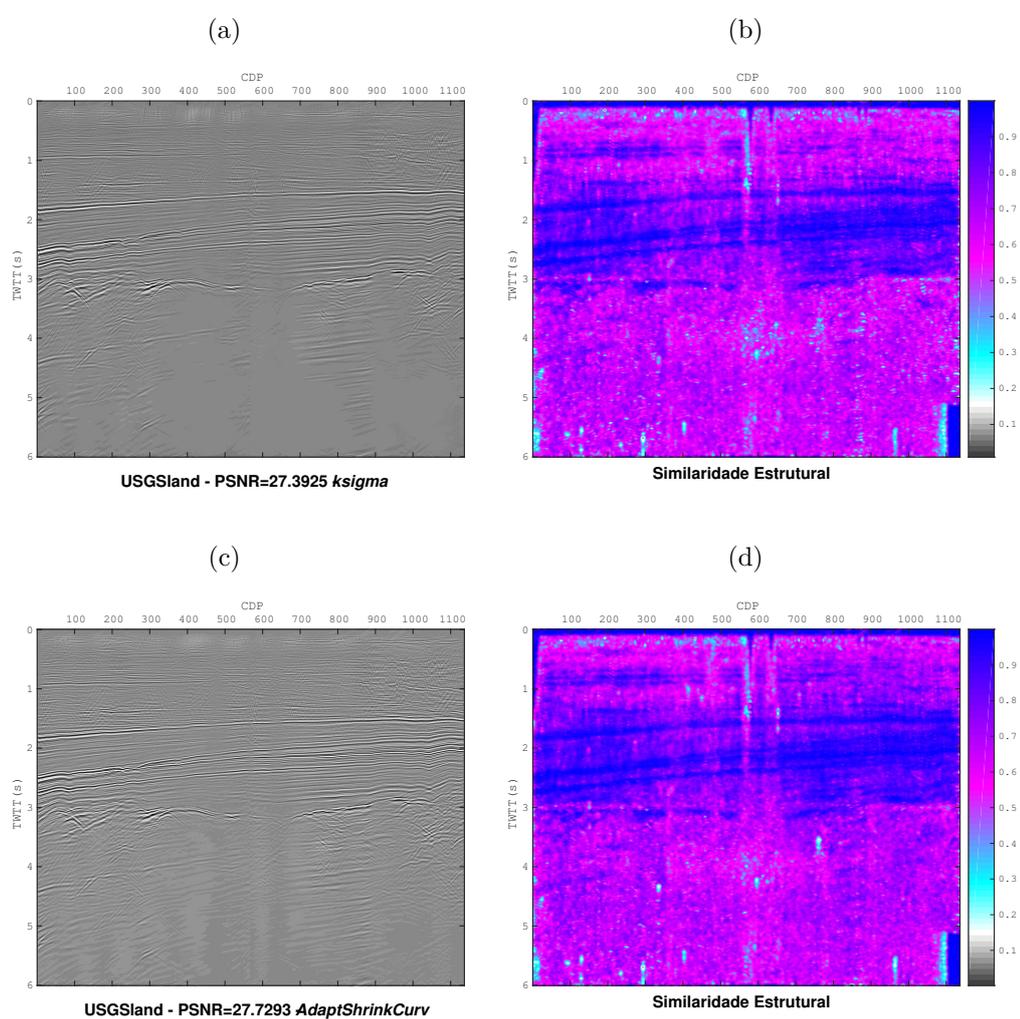
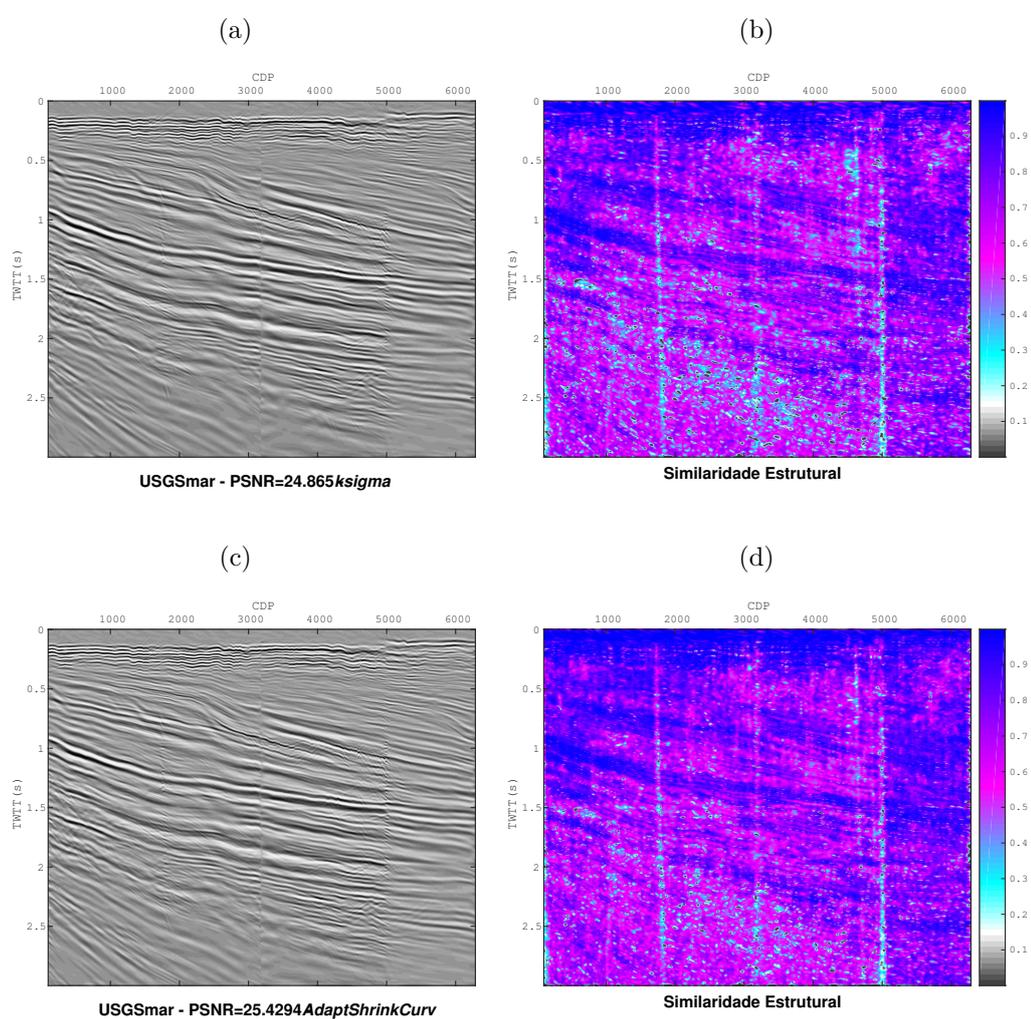


Figura 117 – Remoção de ruídos na seção USGSmar (111) utilizando os métodos: *ksigma* (a) e *AdaptShrinkCurv* (c), aplicados individualmente às suas partições. Também são mostrados os mapas de similaridade estrutural para ambos, imagens (b) e (d).



5.2.2 Abordagem 2 - PROBSHRINKCURV

Em analogia à sub-seção 5.1.2, tratam-se abaixo, os resultados da filtragem individual em partições do dado e nas versões originais íntegras, quando utilizando o *ProbShrinkCurv*.

As figuras 118 e 119 apresentam os resultados para o Realland, figuras 120 e 121 são relativas ao USGSland e imagens 122 e 123 ao USGSmar.

Em geral, a atenuação produz resultados similares aos apresentados na sub-seção anterior, possivelmente, mais próximos do *AdaptShrinkCurv*. O ruído é, em grande parte, eficientemente atenuado. Trabalhar com partes do dado, mais uma vez produz resultados similares, exceto na secção superior esquerda do Realland (119), quando há atenuação parcial de alguns refletores. Este efeito está associado ao comportamento do método nas bordas da seções, onde são bastante atenuados, e aparece também, com menor intensidade, no resultado 115c. Postula-se que uma possível solução, seja aumentar a partição do dado previamente à filtragem — replicar o último traço até que a imagem possua o dobro do tamanho, o que garantiria continuidade lateral dos eventos sísmicos nas bordas.

Como esperado, os resultados para USGSmar, se destacam, mostrando que o *ProbShrinkCurv* foi eficiente em discernir sinal e ruído.

Figura 118 – Remoção de ruídos na seção Realland (10) utilizando o método *ProbShrinkCurv* (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b).

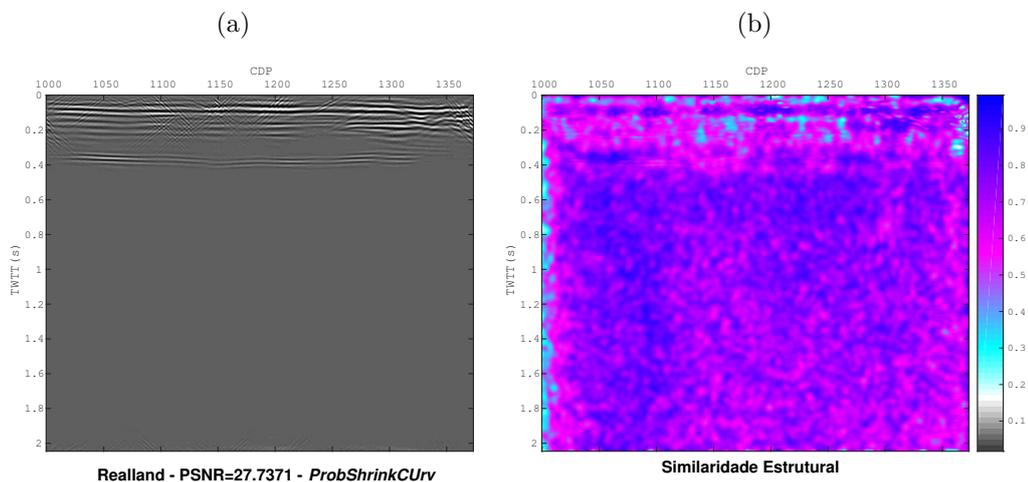


Figura 119 – Remoção de ruídos na seção Realland (10) utilizando o método *ProbShrinkCurv*, aplicado individualmente às suas partições (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b).

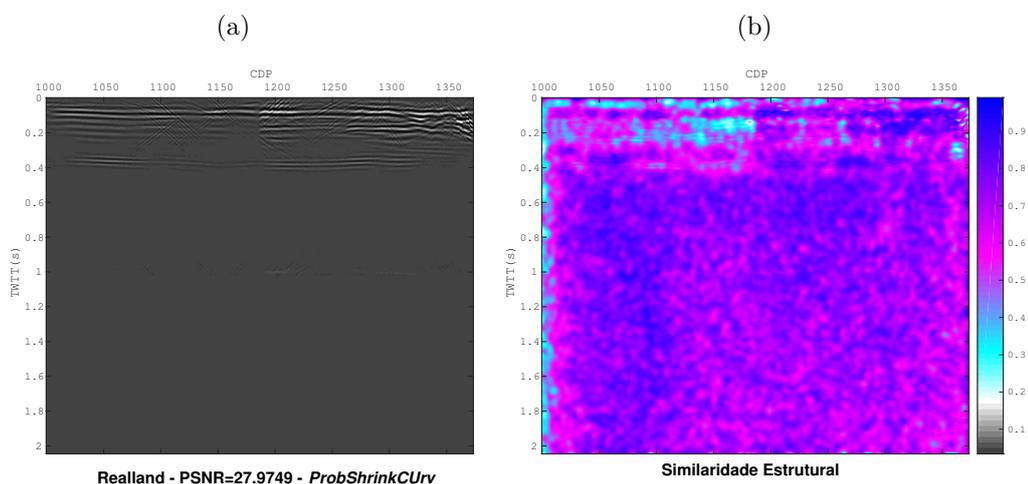


Figura 120 – Remoção de ruídos na seção USGSland (11) utilizando o método *ProbShrinkCurv* (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b).

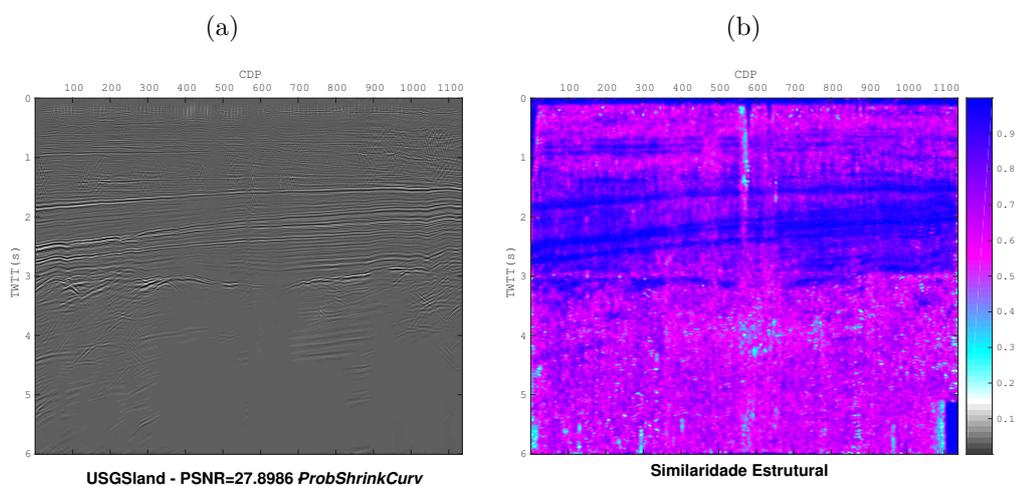


Figura 121 – Remoção de ruídos na seção USGSland (11) utilizando o método *ProbShrinkCurv*, aplicado individualmente às suas partições (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b).

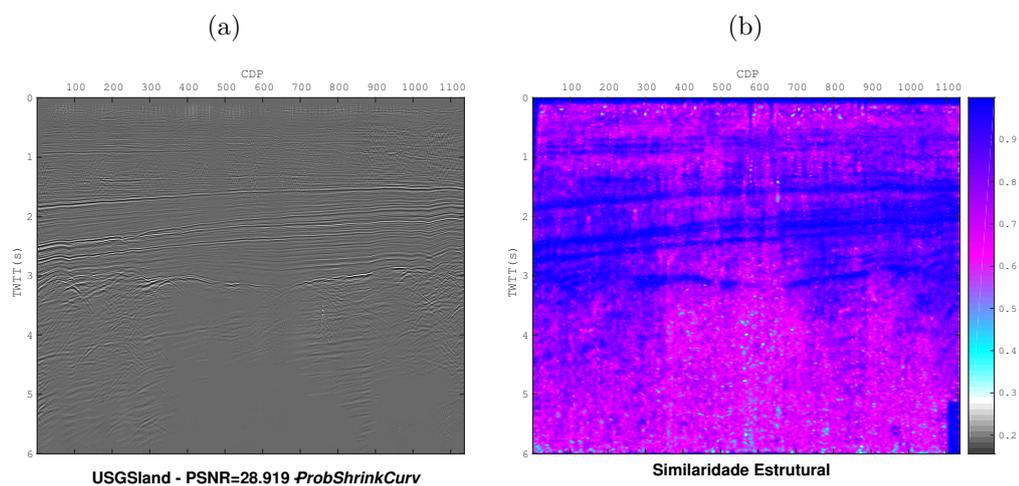


Figura 122 – Remoção de ruídos na seção USGSmar (111) utilizando o método *ProbShrinkCurv* (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b).

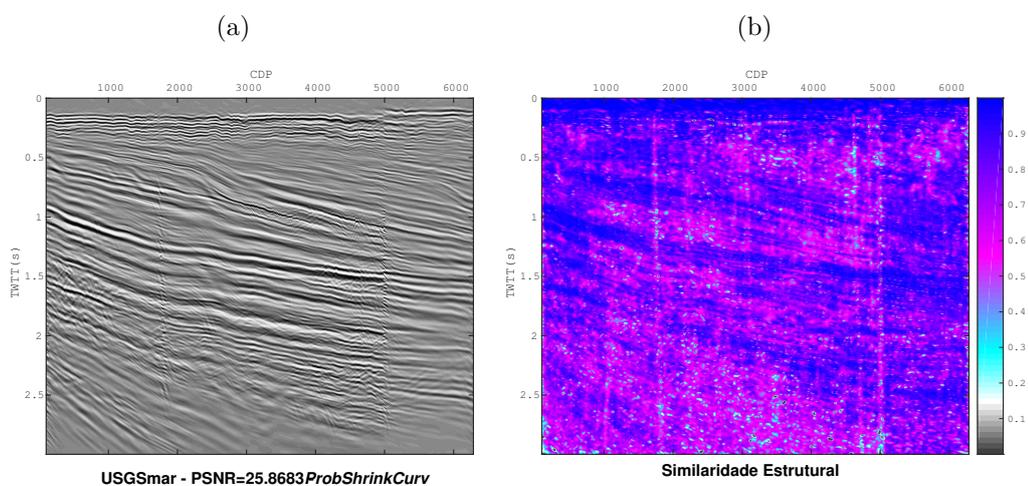
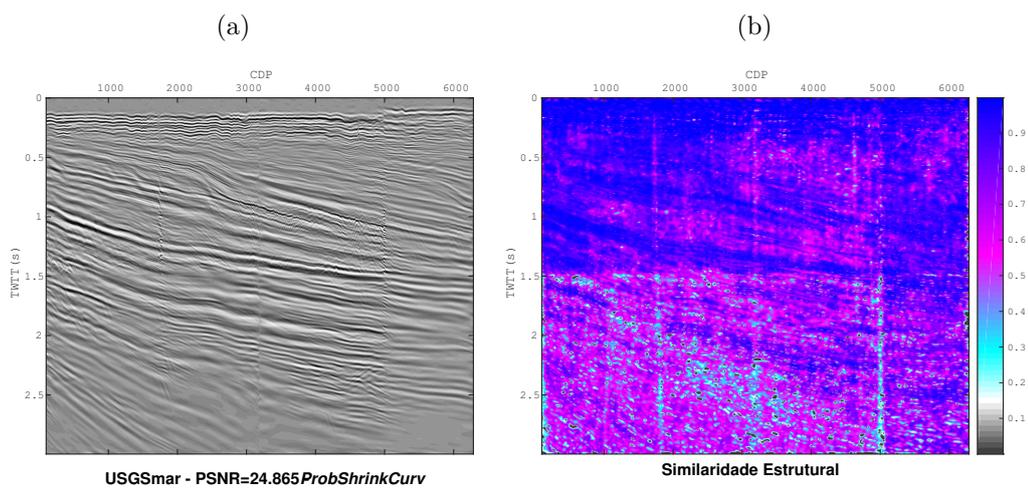


Figura 123 – Remoção de ruídos na seção USGSmar (111) utilizando o método *ProbShrink-Curv*, aplicado individualmente às suas partições (a) e mapa de similaridade estrutural resultante (b).



5.2.3 Refinamento dos resultados e Análise da Inversão do traço

Como nos testes com dados controlados, a presença de artefatos após a filtragem, parece inerente às técnicas estudadas. Aqui também, o refinamento foi necessário, previamente à análise da inversão.

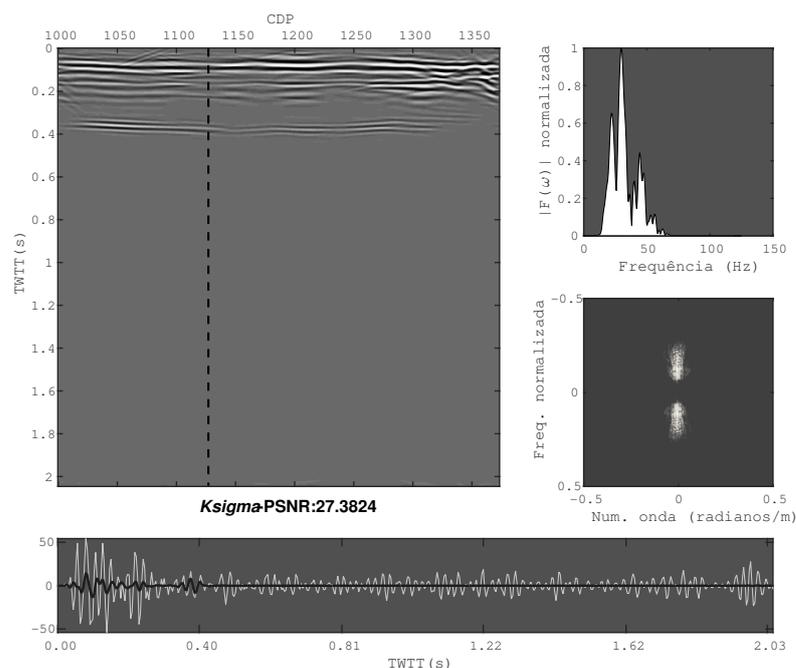
As figuras 124, 125, 126, 127, 128 e 129 mostram os resultados refinados para a seção Realland. Figuras 130, 131, 132, 133, 134 e 135, mostram os refinamentos associados ao USGSland. Para o USGSmar, tem-se as figuras: 136, 137, 138, 139, 140, 141.

Analisando as seções refinadas, observa-se que a grande maioria dos artefatos direcionais foram removidos. Em comparação às seções originais, o sinal foi recuperado mesmo nas regiões mais rasas, onde as baixas amplitudes dificultam sua distinção do ruído.

Discute-se, por fim, os resultados da inversão. O primeiro passo foi definir um modelo inicial para as seções, como padrão quando da inversão de dados reais. O modelo para o Realland, foi determinado com base na descrição geológica da região de origem do dado. Trata-se, portanto, de um modelo teórico. Optou-se por tal abordagem devido ao resultado da análise de velocidades não ter sido disponibilizado. Ainda assim, por ser uma região conhecida, compreende-se que a informação geológica seja confiável.

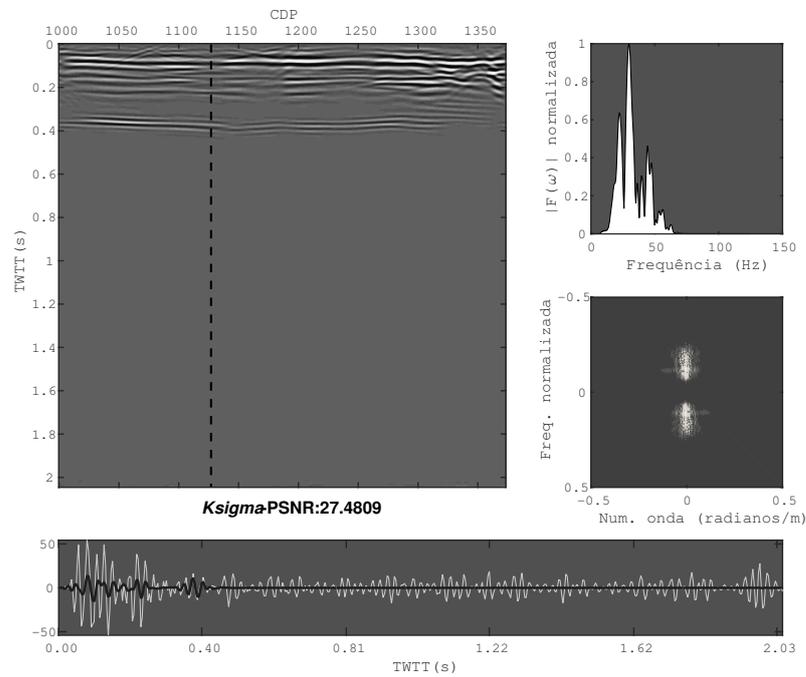
Para o modelo do USGSland, utilizou-se a informação fornecida no banco de dados

Figura 124 – Refinamento da seção 112a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).



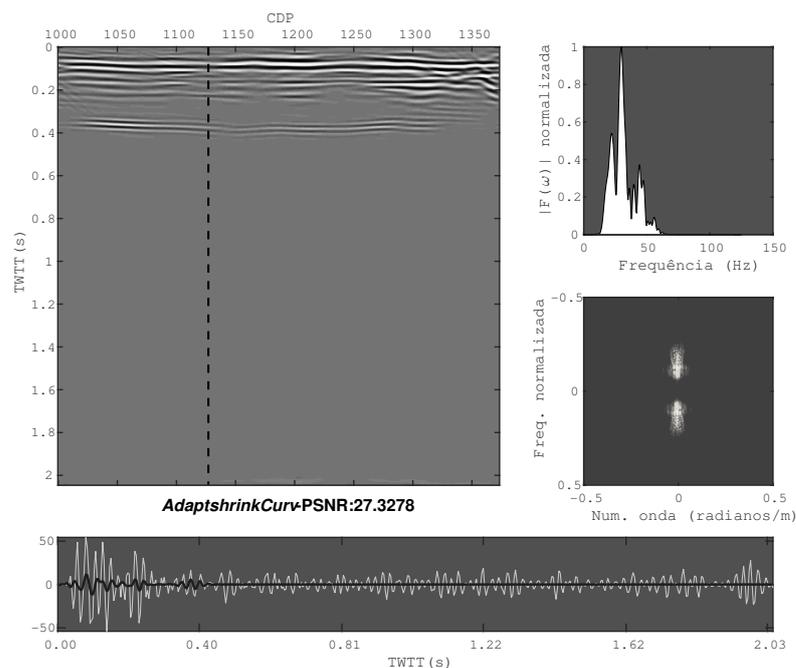
Fonte: O autor.

Figura 125 – Refinamento da seção 115a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e suas respectiva versão original (branco).



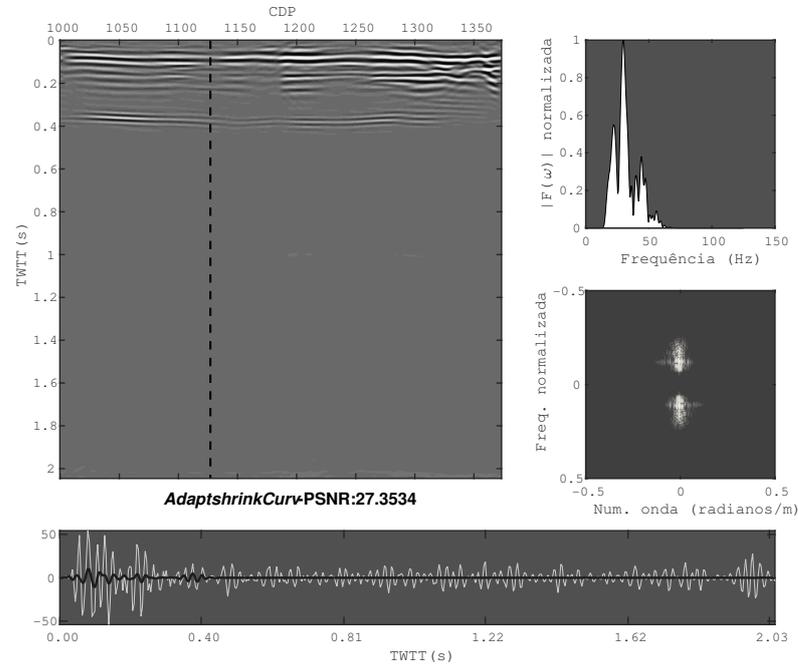
Fonte: O autor.

Figura 126 – Refinamento da seção 112c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).



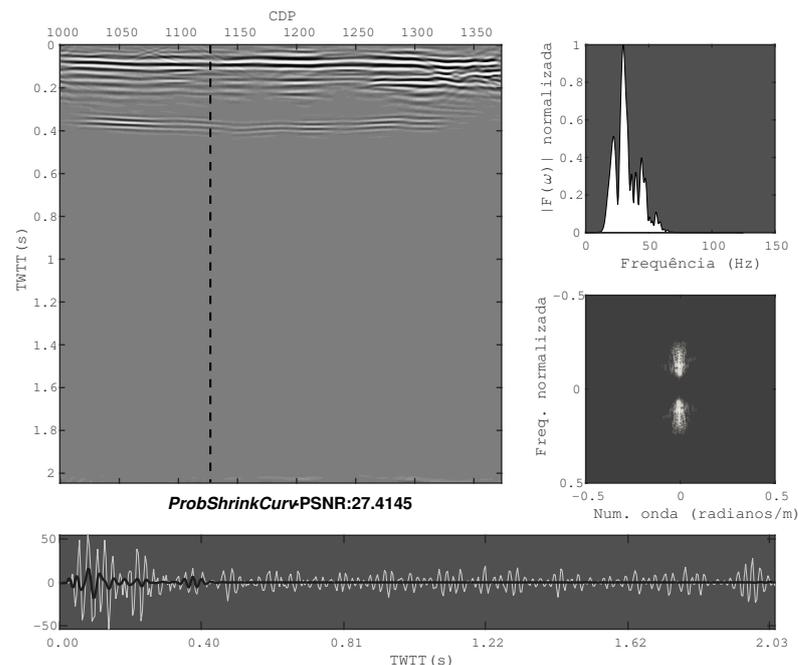
Fonte: O autor.

Figura 127 – Refinamento da seção 115c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e suas respectiva versão original (branco).



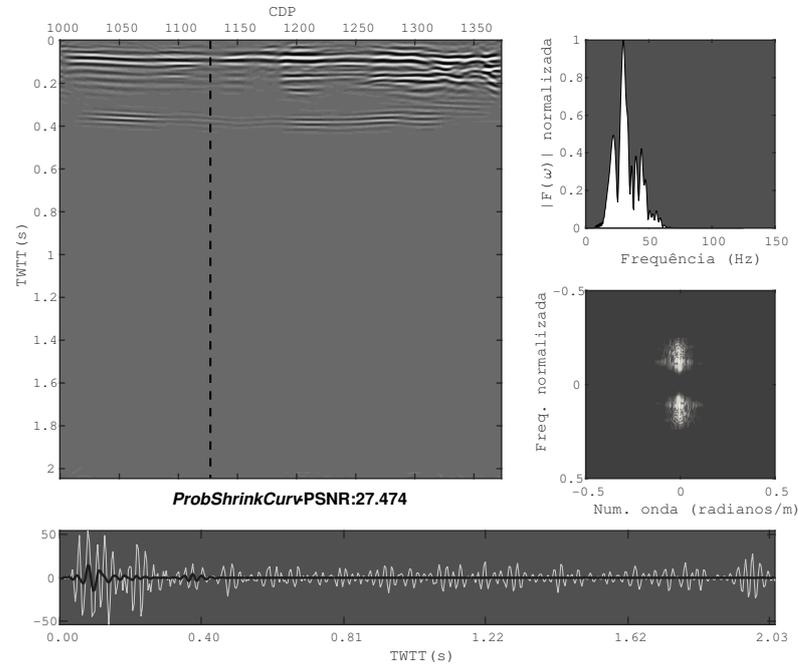
Fonte: O autor.

Figura 128 – Refinamento da seção 118a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).



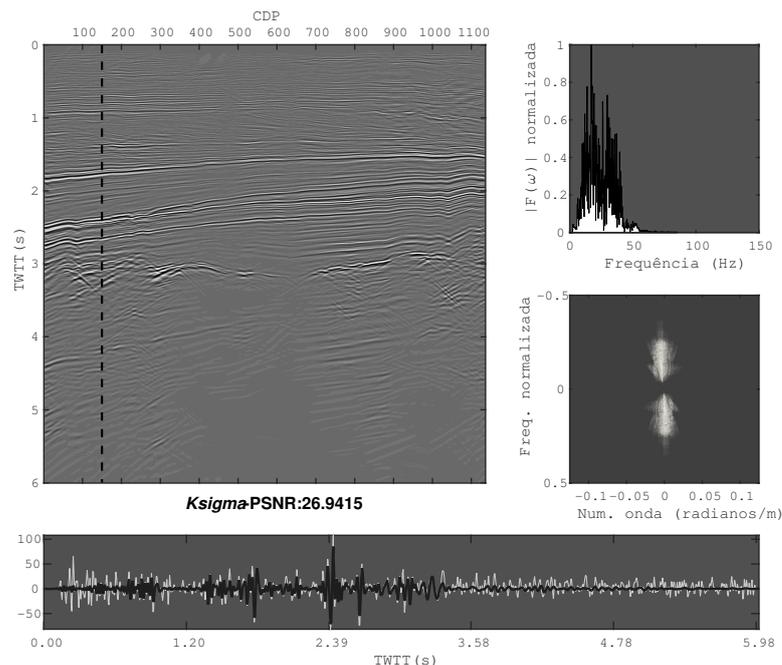
Fonte: O autor.

Figura 129 – Refinamento da seção 119a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e suas respectiva versão original (branco).



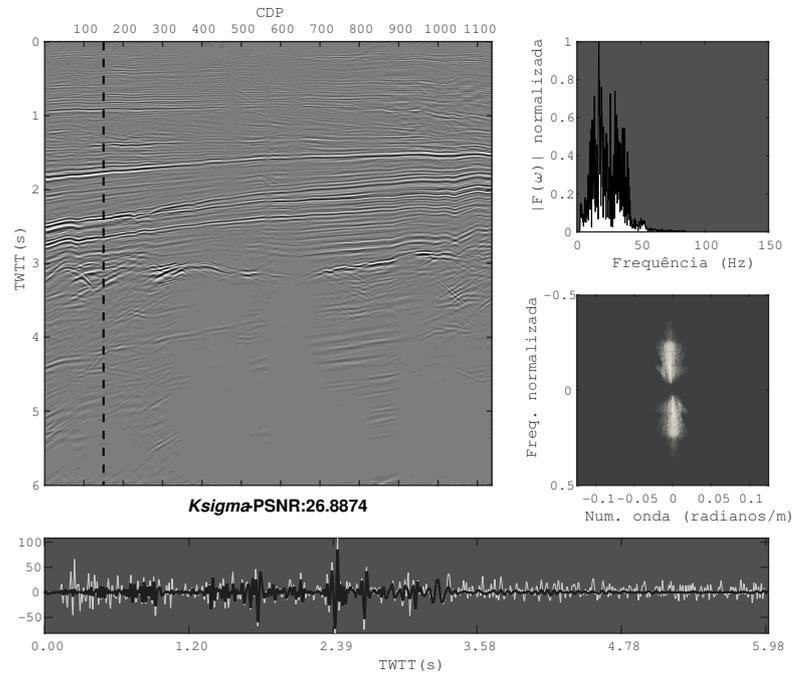
Fonte: O autor.

Figura 130 – Refinamento da seção 113a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).



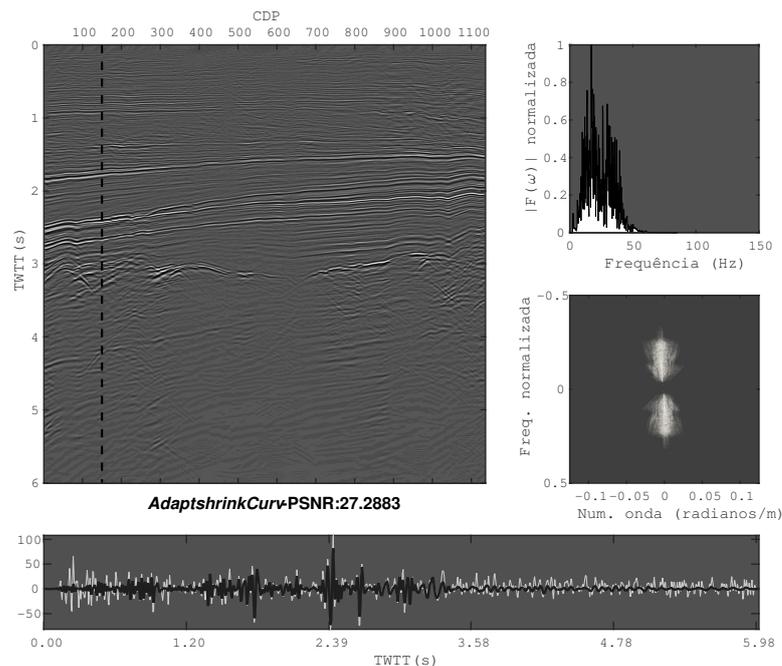
Fonte: O autor.

Figura 131 – Refinamento da seção 116a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).



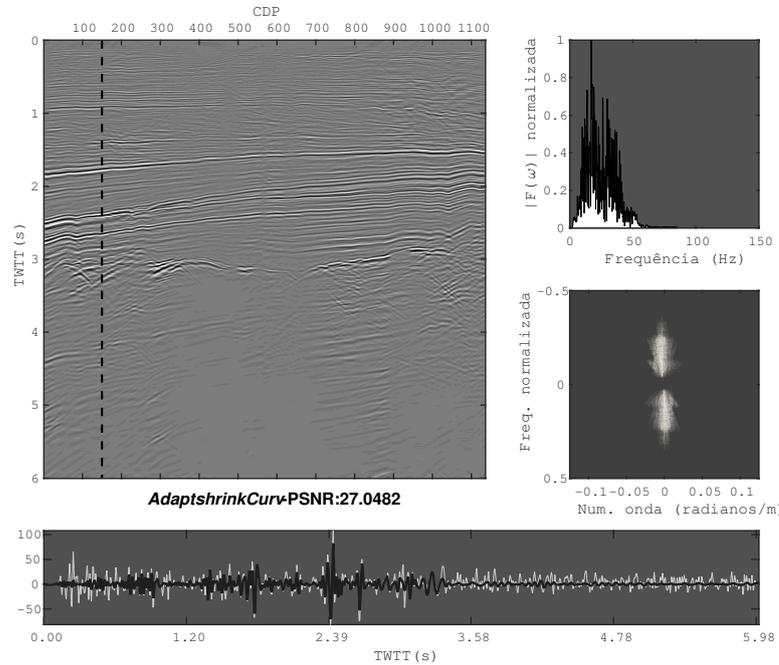
Fonte: O autor.

Figura 132 – Refinamento da seção 113c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).



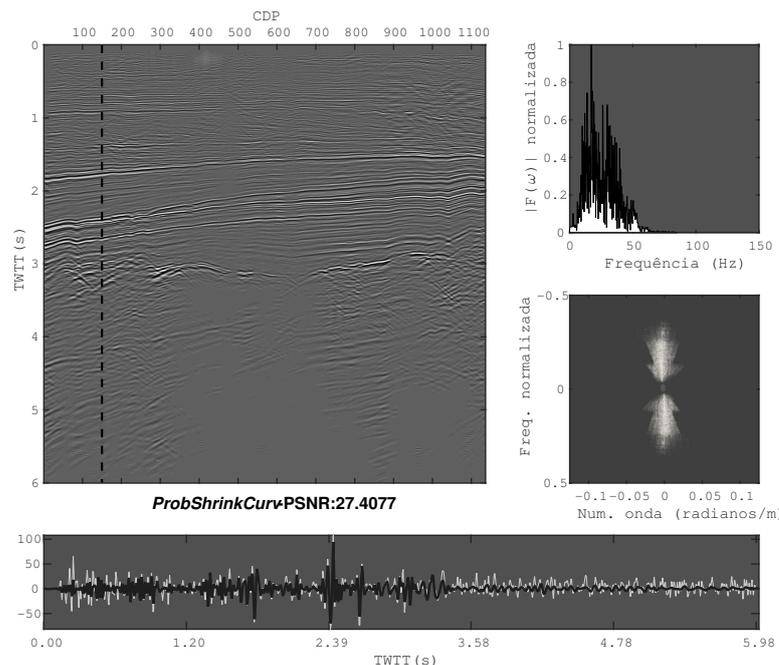
Fonte: O autor.

Figura 133 – Refinamento da seção 116c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e suas respectiva versão original (branco).



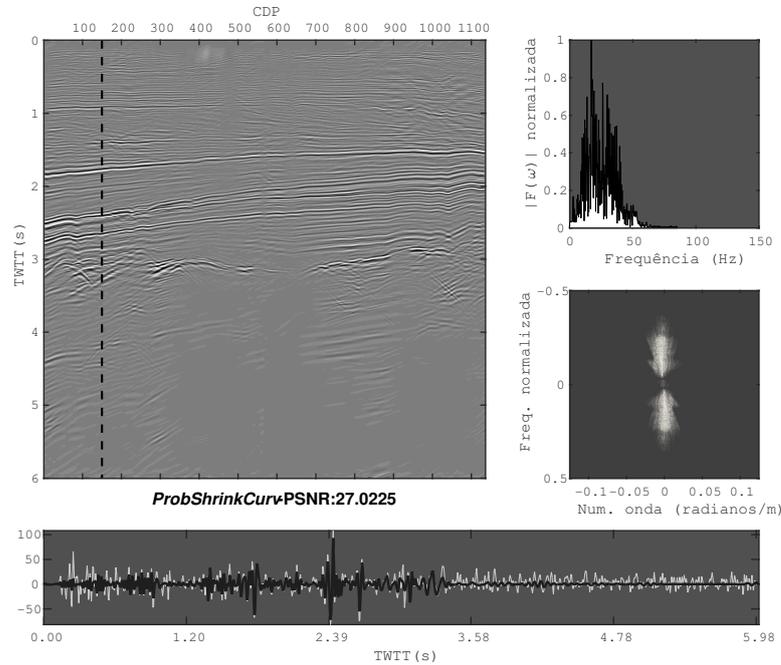
Fonte: O autor.

Figura 134 – Refinamento da seção 120a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).



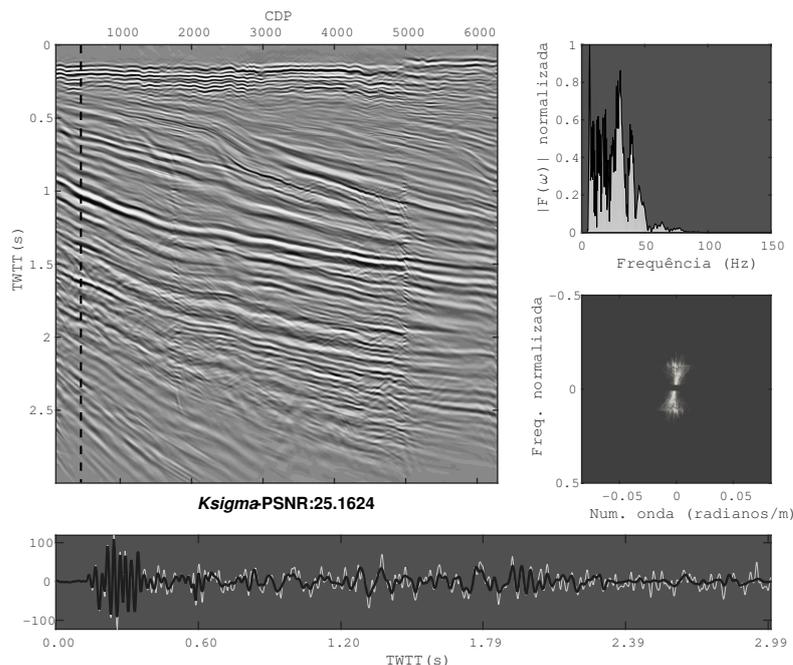
Fonte: O autor.

Figura 135 – Refinamento da seção 121a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e suas respectiva versão original (branco).



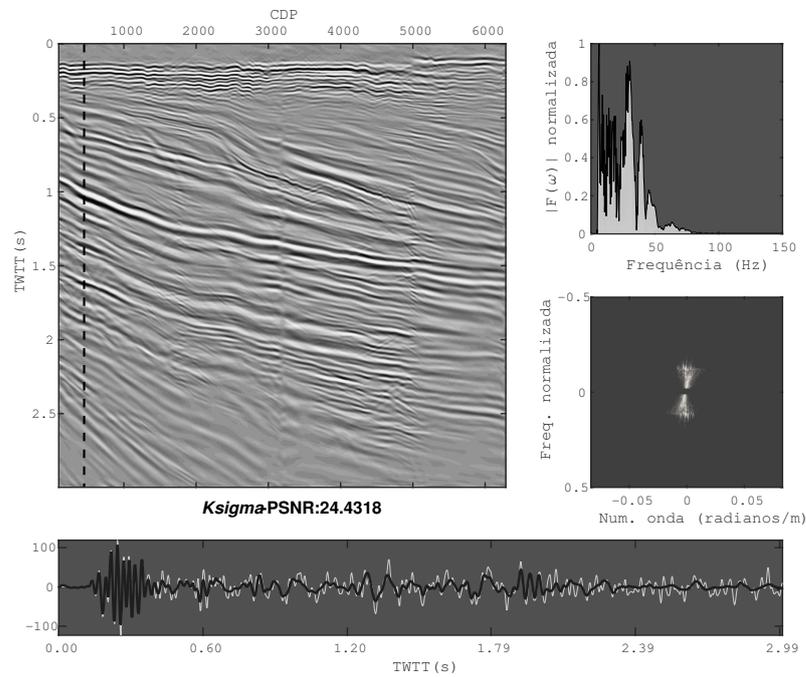
Fonte: O autor.

Figura 136 – Refinamento da seção 114a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).



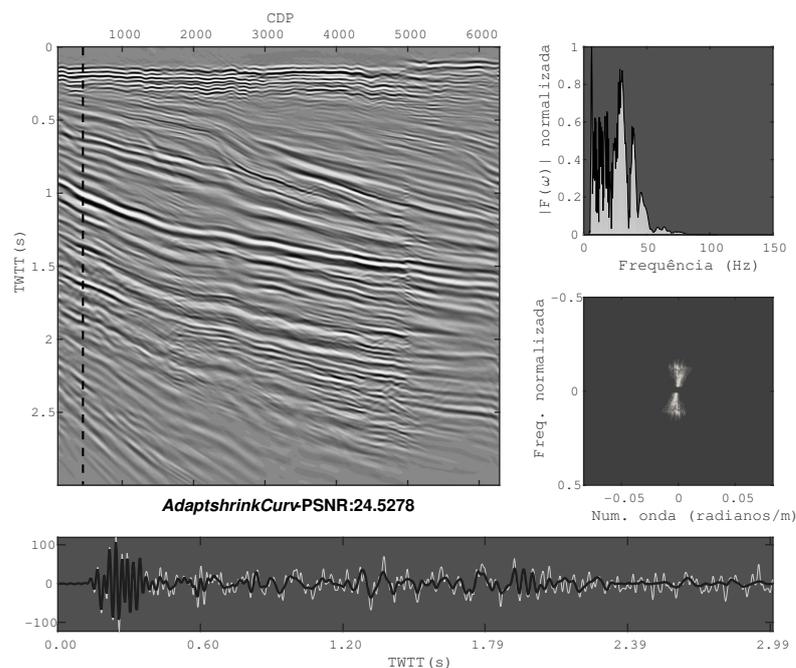
Fonte: O autor.

Figura 137 – Refinamento da seção 117a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e suas respectiva versão original (branco).



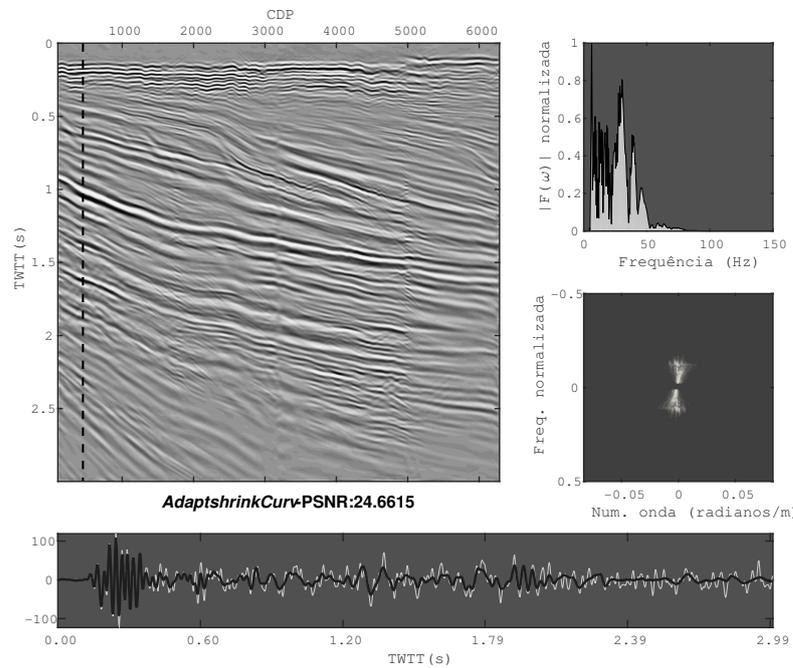
Fonte: O autor.

Figura 138 – Refinamento da seção 114c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).



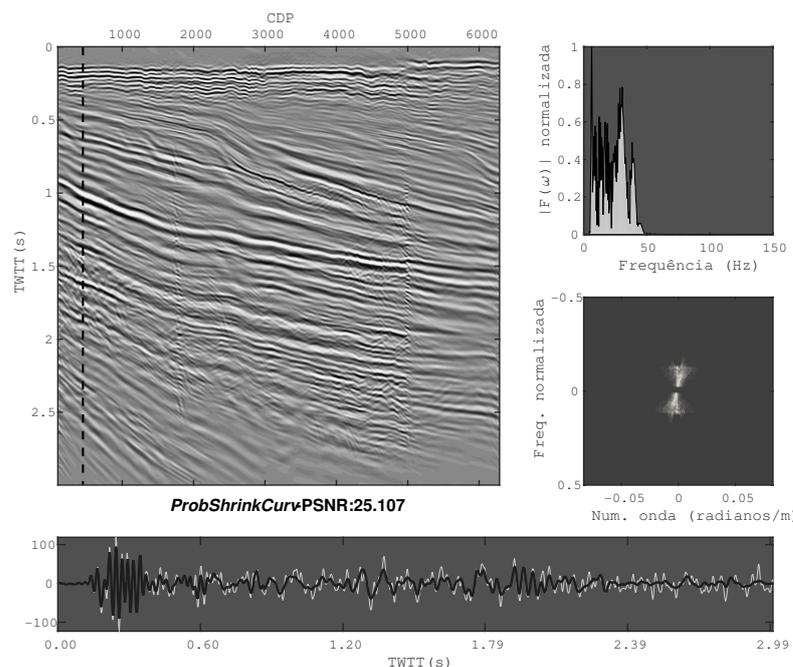
Fonte: O autor.

Figura 139 – Refinamento da seção 117c. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e suas respectiva versão original (branco).



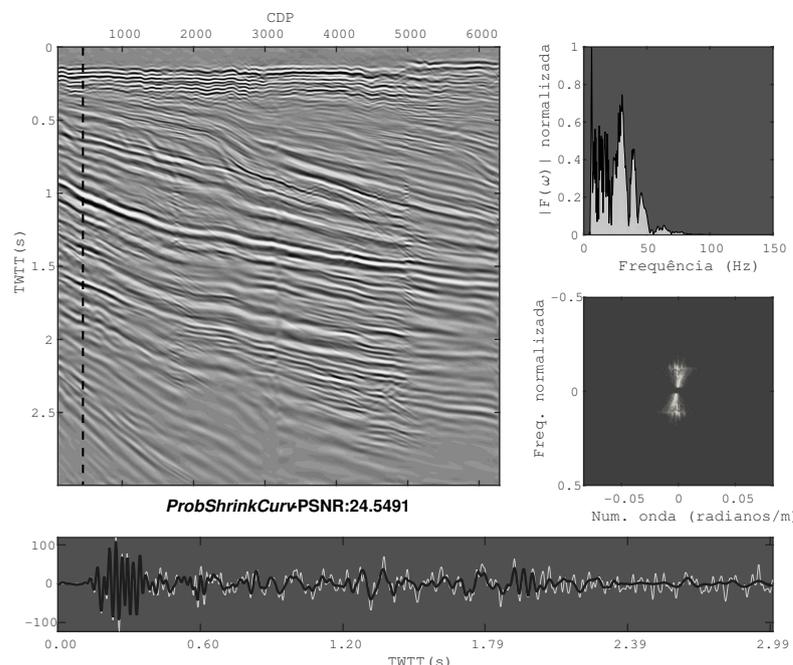
Fonte: O autor.

Figura 140 – Refinamento da seção 122a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e sua respectiva versão original (branco).



Fonte: O autor.

Figura 141 – Refinamento da seção 123a. À direita tem-se os espectros de frequência e F-K. Na parte de baixo, destaca-se o traço 175 (cdp 1127) em preto e suas respectiva versão original (branco).



Fonte: O autor.

on-line: <https://certmapper.cr.usgs.gov/data/NPRA/seismic/1975/36X_75/IMAGES/36X_75_PT1_IM.JPG>. Lá, as velocidades utilizadas na correção NMO do dado são fornecidas.

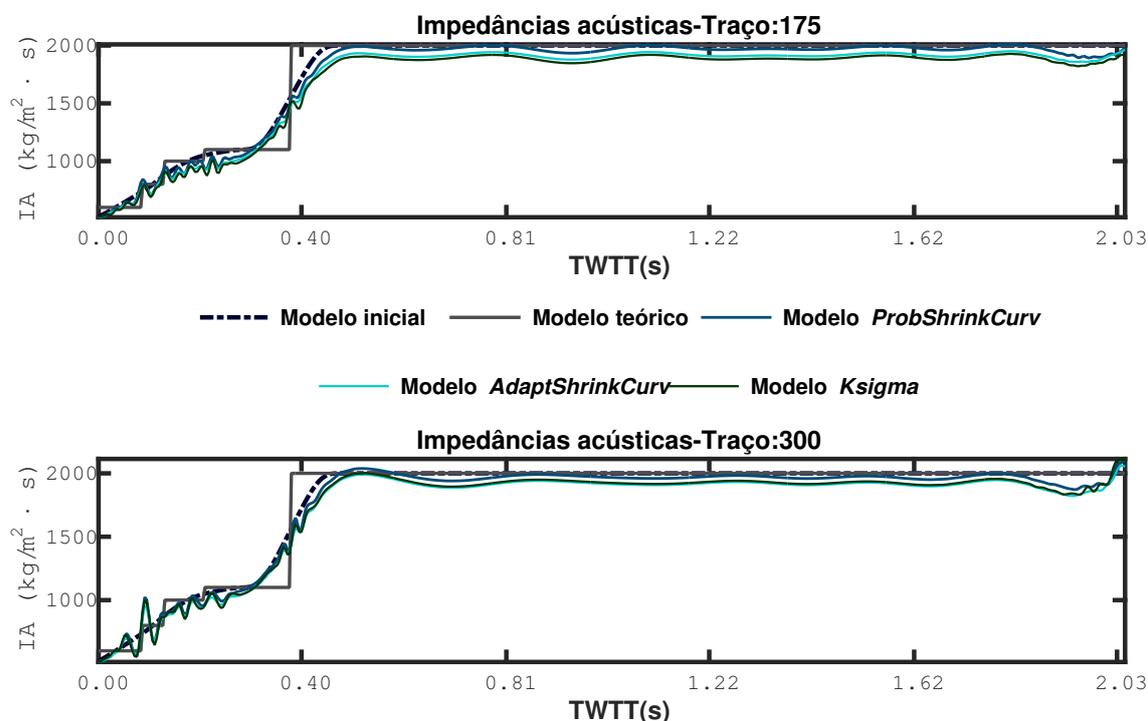
Quanto ao USGSmar, como anteriormente comentado, Klitgord e Schneider (1994) descreve a análise de velocidades no dado. Do modelo apresentado, construiu-se o aqui utilizado.

Os resultados das inversões, assim como os modelos iniciais utilizados, são mostrados nas figuras abaixo: 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152 e 153.

Em geral, os resultados das inversões foram satisfatórios, considerando a complexidade envolvida na inversão de dados reais. Para o Realland, iniciando com um modelo suavizado, a inversão é capaz de aproximar-se do modelo teórico, ou mesmo ajustá-lo, como no caso da última camada (mais profunda), quando as impedâncias estimadas são relativamente inferiores ao modelo teorizado. Exceções, são os resultados para os traço 300 nas figuras 144, 145, quando o super ajuste, mais uma vez produz um efeito oscilatório no modelo estimado.

Em se tratando do USGSland, os modelos estimados são bem próximos nas regiões $\leq \sim 3.58$ dos dois traços, para as duas metodologias de inversão. Devido à escala de variação das impedância nesta situação, é difícil afirmar com certeza qual dos métodos

Figura 142 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens na seção Realland completa. Os traços 175 e 300 equivalem aos cdps 1127 e 1218.3, respectivamente.



de filtragem foi responsável pelo melhor modelo estimado. Destaca-se no entanto, para inversão GLI do traço 150 uma discrepância do *ProbShrinkCurv* próximo a $\sim 1.2s$.

Considerando os modelos estimados a partir dos resultados da filtragem do USGS-mar, é possível afirmar que os três possuem grande similaridade. Além disso, para este caso, as impedâncias estimadas apresentam um comportamento mais estável, além de mais próximo dos modelos apresentados em Klitgord e Schneider (1994).

Por fim, durante os testes, foi observado que o *AdaptShrinkCurv* produziu os modelos mais estáveis, apresentando menos problemas quando da inversão. Entende-se portanto, que tenha sido mais eficiente em remover o ruído e recuperar as amplitudes do sinal, propriedades diretamente relacionadas com a estabilidade das estimativas.

Figura 143 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do Realland. Os traços 175 e 300 equivalem aos cdps 1127 e 1218.3, respectivamente.

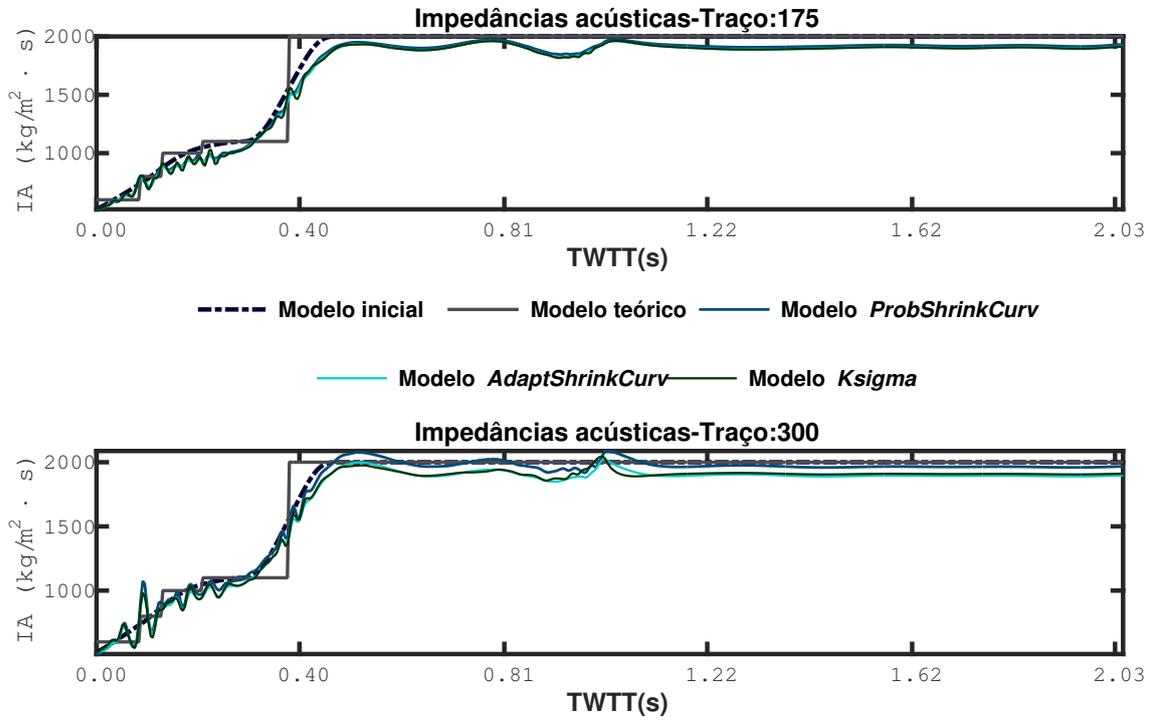


Figura 144 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens na seção Realland completa. Os traços 175 e 300 equivalem aos cdps 1127 e 1218.3, respectivamente.

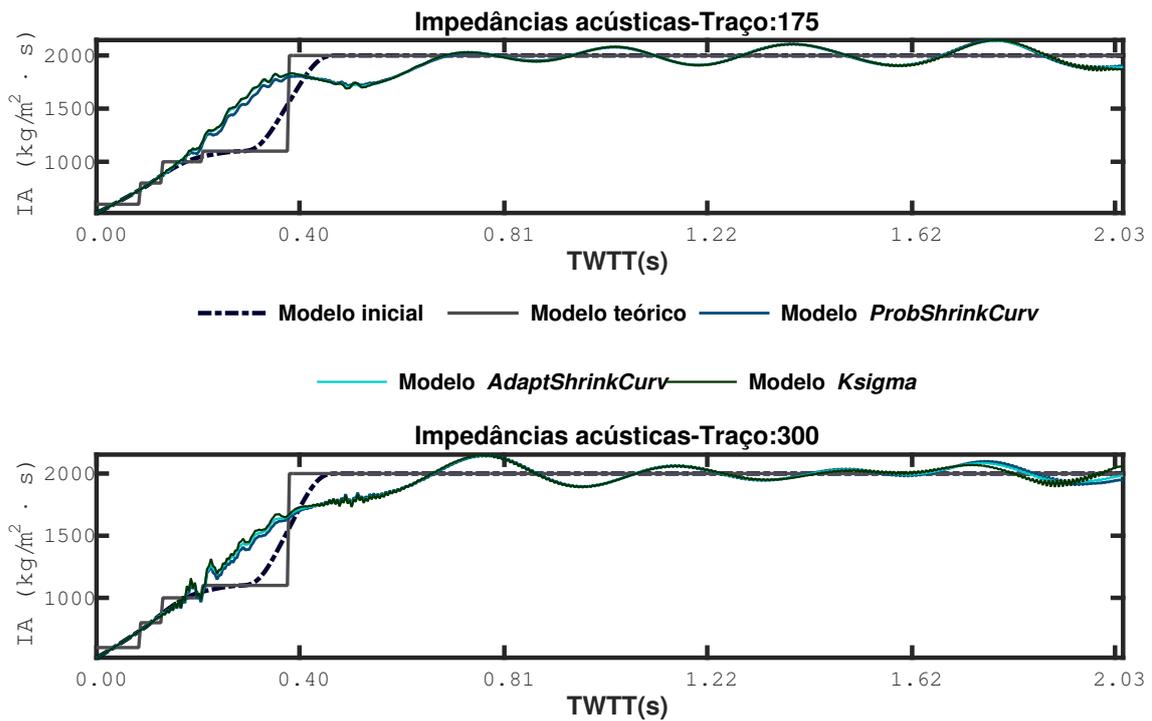


Figura 145 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do Realland. Os traços 175 e 300 equivalem aos cdps 1127 e 1218.3, respectivamente.

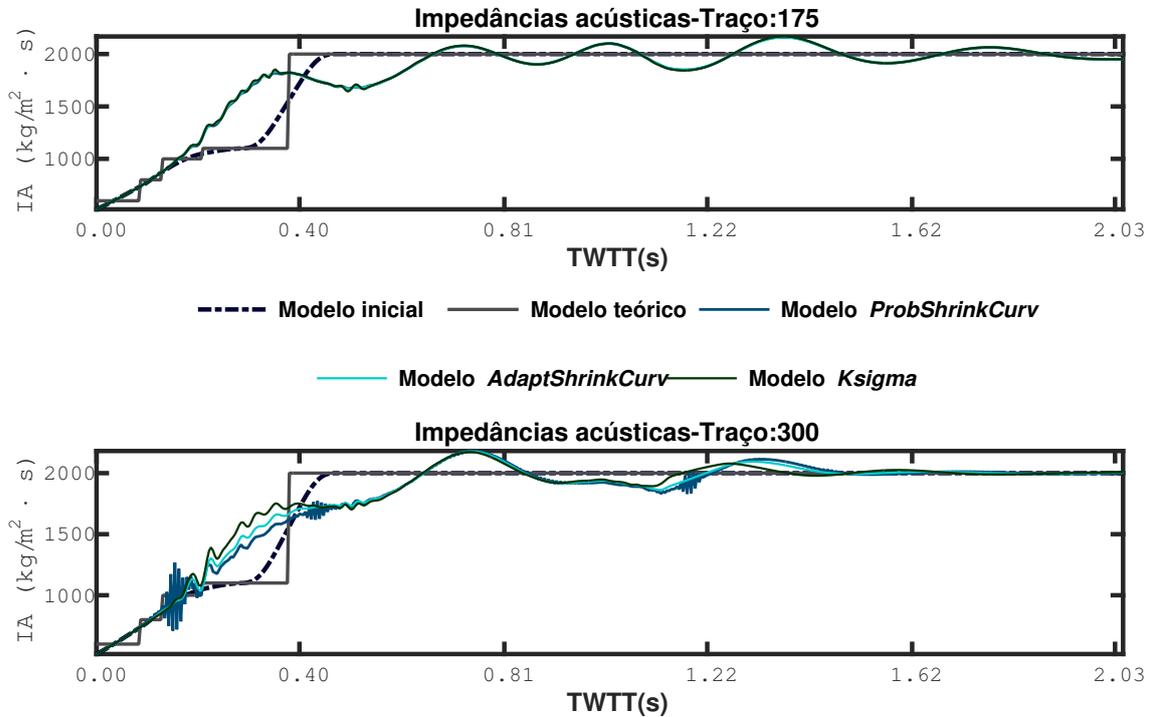


Figura 146 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens na seção USGSland completa. Os traços 150 e 977 equivalem aos cdps 150 e 977, respectivamente.

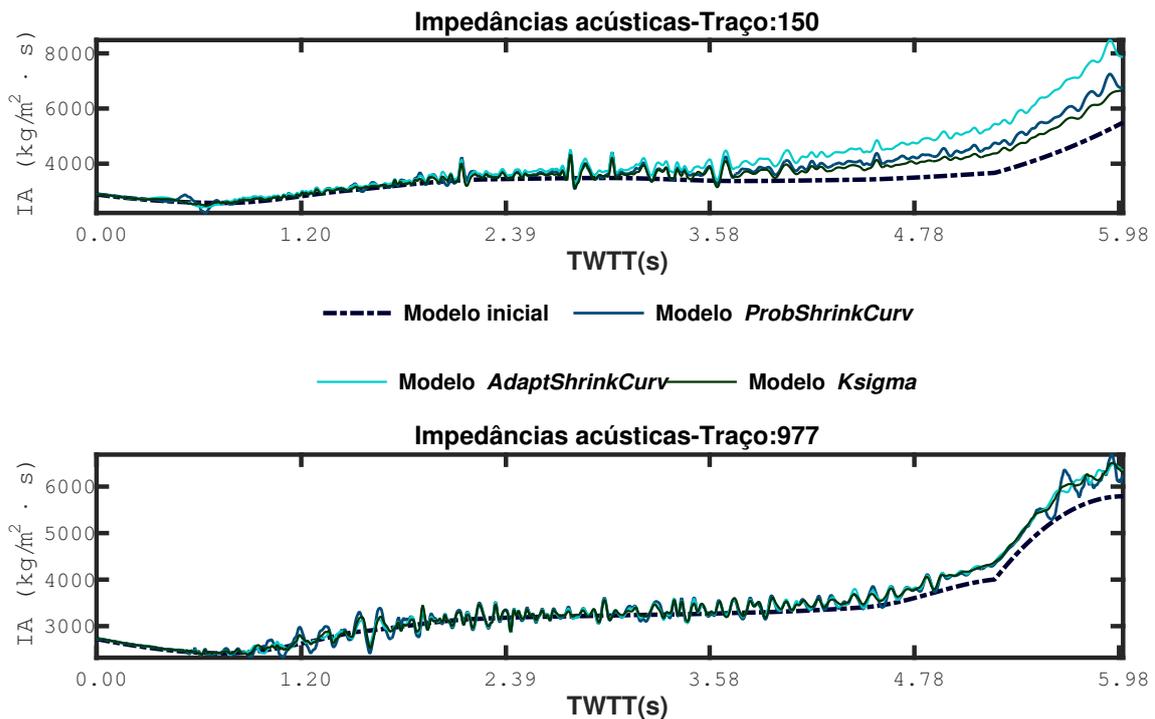


Figura 147 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do USGSland. Os traços 150 e 977 equivalem aos cdps 150 e 977, respectivamente.

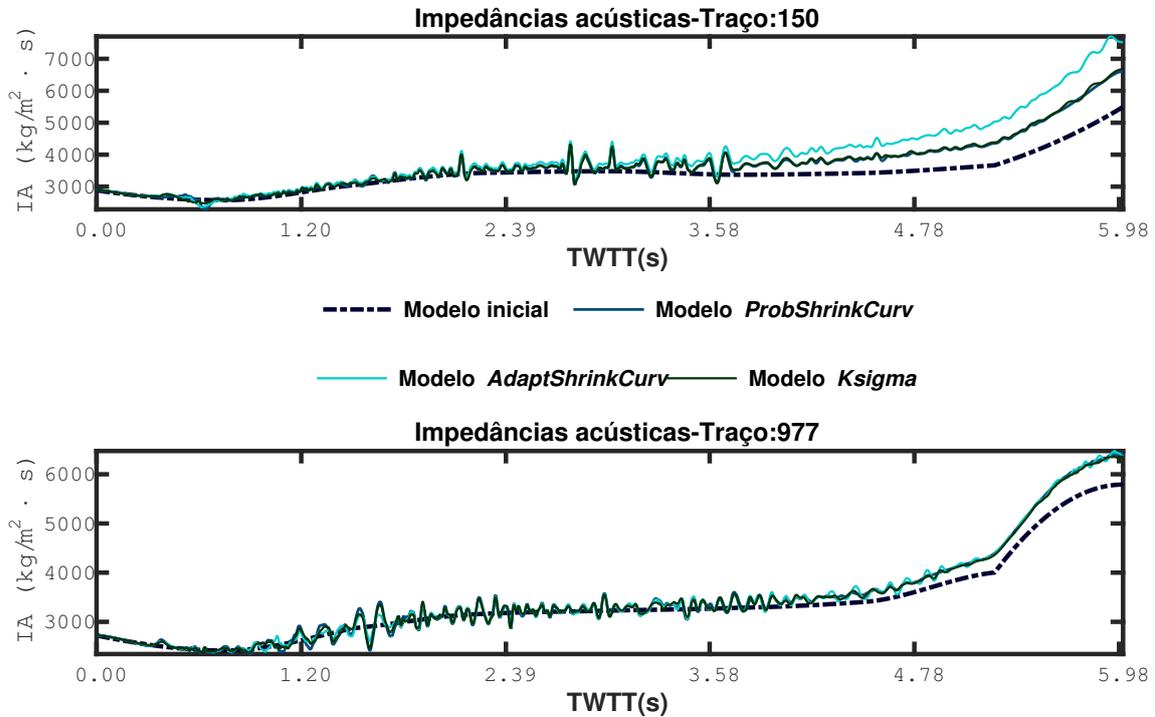


Figura 148 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens na seção USGSland completa. Os traços 150 e 977 equivalem aos cdps 150 e 977, respectivamente.

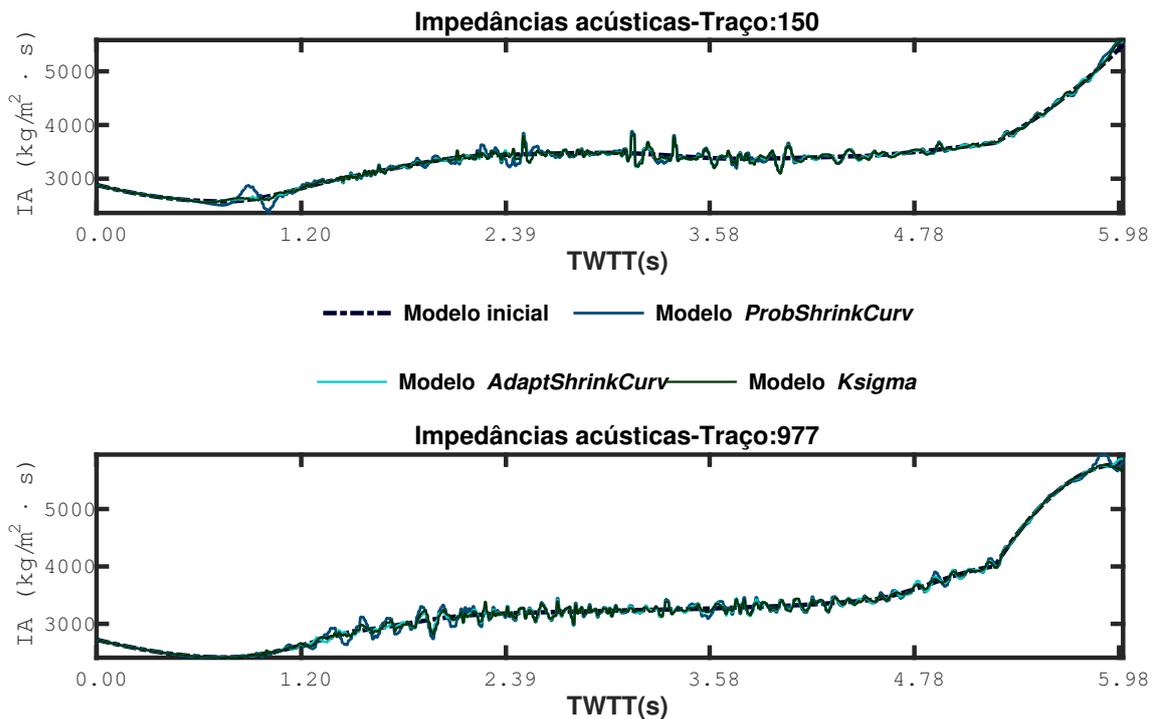


Figura 149 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do USGSland. Os traços 150 e 977 equivalem aos cdps 150 e 977, respectivamente.

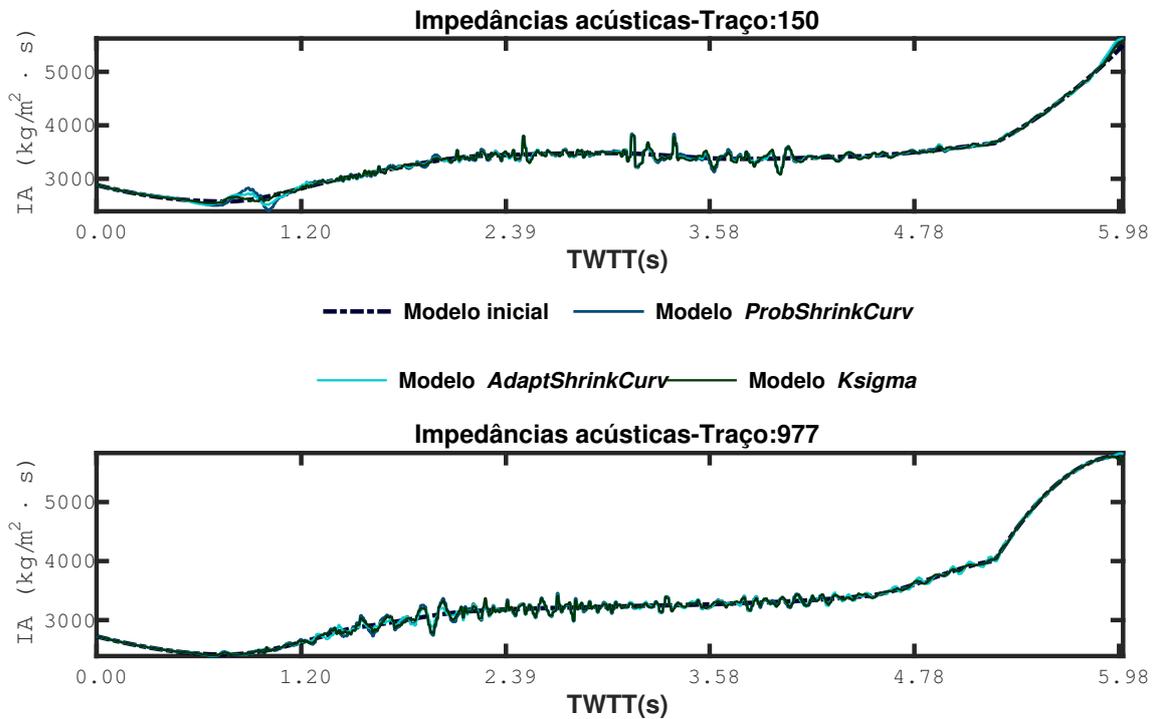


Figura 150 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens na seção USGSmar completa. Os traços 350 e 750 equivalem aos cdps 450 e 850, respectivamente.

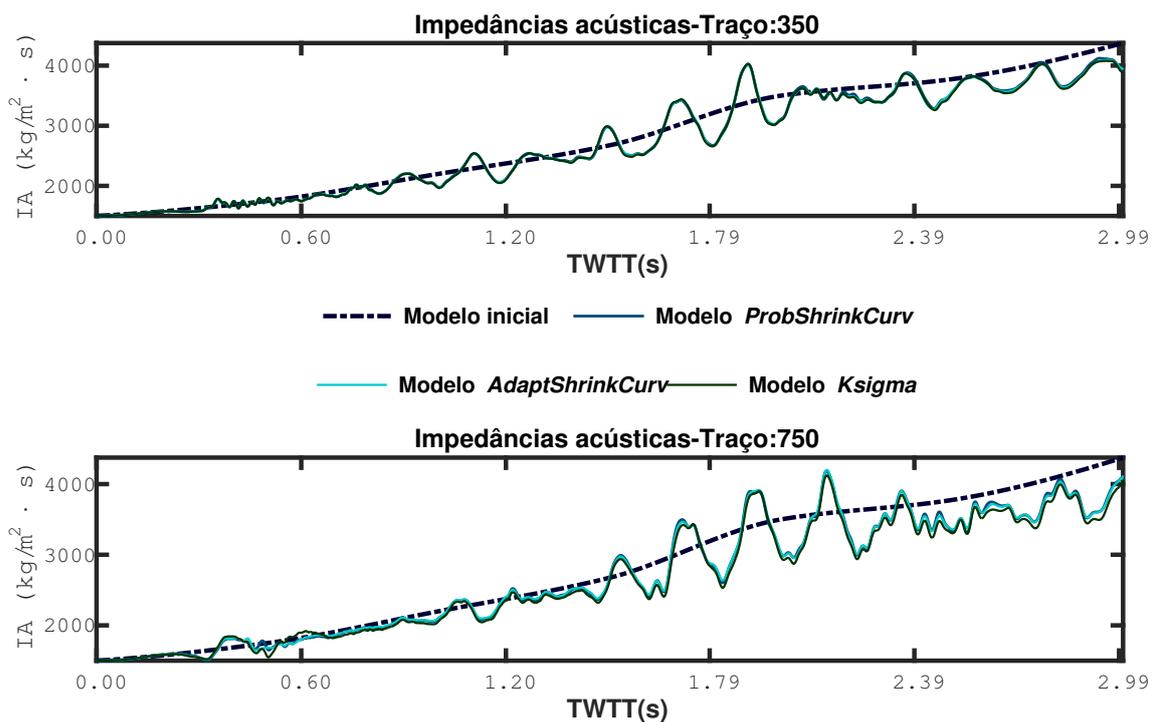


Figura 151 – Inversão Bayes dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do USGSmar. Os traços 350 e 750 equivalem aos cdps 450 e 850, respectivamente.

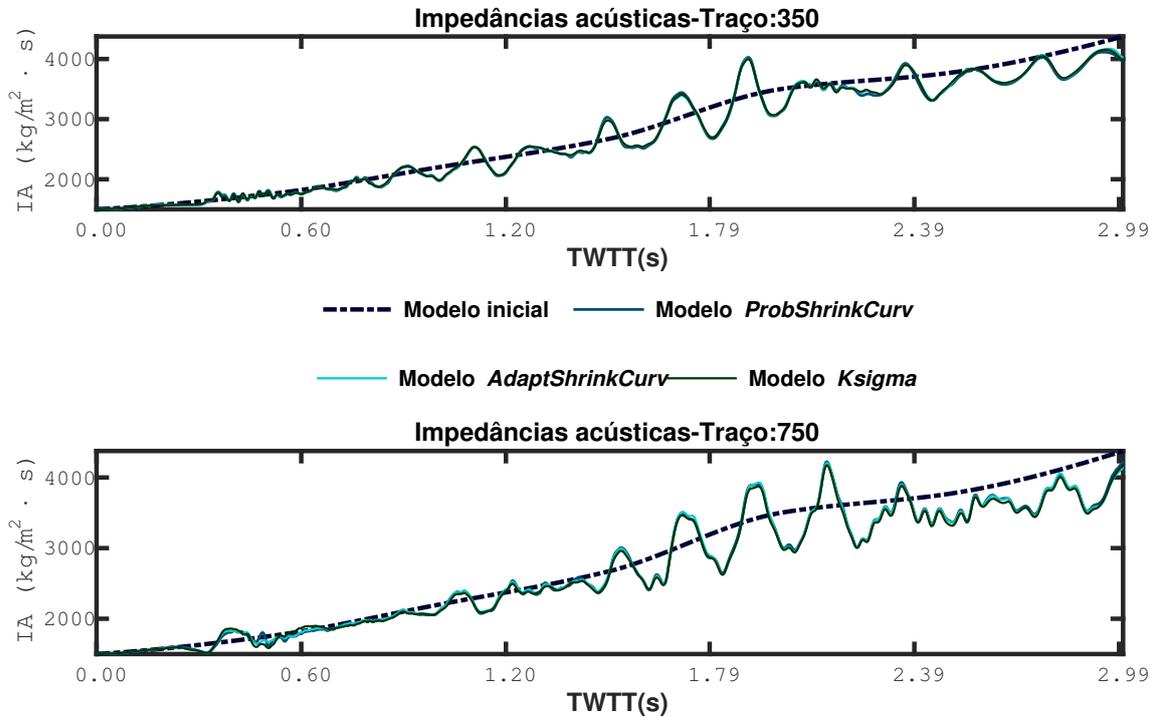


Figura 152 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens na seção USGSmar completa. Os traços 350 e 750 equivalem aos cdps 450 e 850, respectivamente.

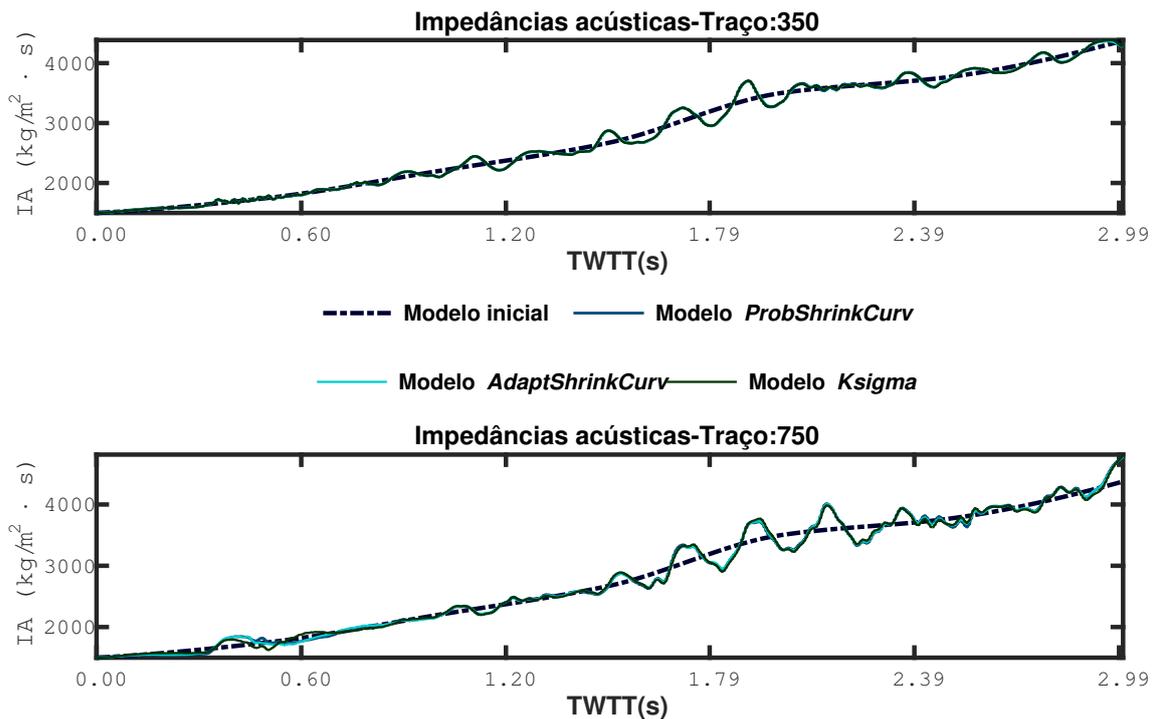
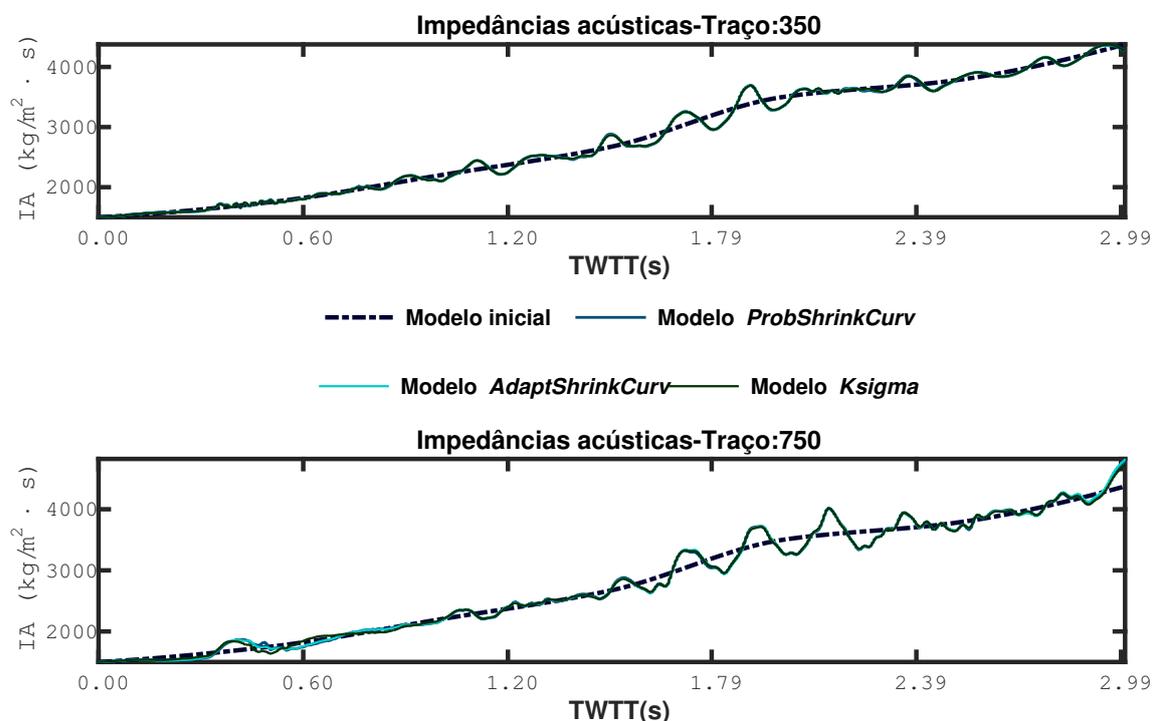


Figura 153 – Inversão GLI dos resultados após refinamento das filtragens nas partições do USGSmar. Os traços 350 e 750 equivalem aos cdps 450 e 850, respectivamente.



5.3 Sumário e conclusões

O presente capítulo dedicou-se à apresentação e discussão de todos os resultados obtidos neste trabalho. Inicialmente trataram-se dados controlados e, posteriormente analisaram-se situações mais realísticas.

Para os testes com dados controlados, dos três tipos de ruídos utilizados, aqueles mais expressivos nas baixas frequências, levam à pior performance das metodologias estudadas. Ruídos não-correlacionados e de alta frequência, em geral mostraram-se mais tratáveis.

Realizando uma comparação entre performances, notou-se que o *AdaptShrinkCurv* e *ProbShrinkCurv*, por considerar informação sobre correlações intra e entre-bandas na CT, produzem melhores resultados que o *ksigma* quando de ruídos correlacionados. Uma vez que a maior parte das perturbações presente nos dados reais analisados, possuem correlação com o sinal, confirmou-se que os dois métodos supracitados são eficientes em condicionar dados sísmicos.

Devido à existência de artefatos direcionais residuais nas seções filtradas, um refinamento manual, baseado no domínio F-K, foi realizado. O produto final tanto para os dados controlados quanto para os reais, foi bastante satisfatório. Subsequentemente a análise da inversão acústica de dois traços de cada seção foi realizada. Através das

similaridades, em geral observadas, para os modelos estimados, comprovou-se que ambas as filtragens foram eficientes em separar ruído e sinal, ainda que quantitativamente, o *AdaptShrinkCurv* tenha produzido melhores resultados.

No geral, indaga-se que, comparativamente, o *AdaptShrinkCurv* e o *ProbShrinkCurv*, produzem resultados similares, ainda que dentro dos testes deste trabalho, o primeiro tenha sido mais eficiente.

Por fim, chama-se atenção ao procedimento utilizado na seleção do melhor nível de corte da seção anterior. Argumenta-se que através de um estudo mais detalhado deste, há possibilidade para automatização das metodologias aqui apresentadas. Um problema não solucionado, é encontrar os limites para os limiares de corte e um valor aceitável para variá-los.

6 Conclusões

No presente trabalho, analisou-se a aplicação de metodologias baseadas na transformada Curvelet para atenuação de ruídos em dados sísmicos. Visto que a análise quantitativa envolveu técnicas de inversão, é possível descrevê-lo como uma análise do condicionamento de dados sísmicos pós-empilhamento (de afastamento nulo) à inversão acústica do traço. Tratou-se inicialmente de dados controlados, posteriormente, avaliou-se a performance em dados reais.

Uma vez que duas das metodologias discutidas assumem uma distribuição *a priori* dos coeficientes curvelet em cada subbanda, inicialmente buscou-se validar este *prior*. A partir da análise estatística intra-banda utilizada, comprovou-se que a distribuição generalizada Laplaciana é válida, também, para dados sísmicos — ou ao menos para o conjunto aqui utilizado. No entanto, entende-se que outras distribuições possam produzir resultados mais satisfatórios e um estudo relacionado mais conclusivo deve ser realizado.

Ainda que os métodos tratados assumam um modelo de ruído aditivo não correlacionado, os resultados mostram que sua aplicação é consistente, mesmo em casos de ruído correlacionável. Principalmente para o *AdaptShrink*, onde o contexto espacial local dos coeficientes curvelet é utilizado para ponderar o nível de corte, os resultados foram satisfatórios. Os resultados das inversões corroboram tal afirmação, considerando que os modelos estimados foram consistentes com os modelos de subsuperfície.

Da comparação entre as metodologias, observou-se que, no caso geral, o *AdaptShrink* foi mais eficiente. Representa assim, a contribuição do presente trabalho à gama de métodos de atenuação de ruídos em dados sísmicos. No entanto, compreende-se que a pior performance relativa do *ProbShrinkCurv*, está relacionada à escolha da distribuição *a priori*. Reafirma-se, que a pesquisa por uma distribuição mais consistente com “imagens sísmicas”, seria primordial à melhoria dos resultados.

Como anteriormente colocado, um estudo mais detalhado do procedimento de seleção do melhor nível de corte, utilizado na análise com dados reais, é um possível caminho para automatização das metodologias aqui tratadas. Deve-se, porém, pesquisar sobre a determinação dos limites do intervalo definido para os limiares de corte e um valor aceitável de variação.

Por fim, postula-se que a premissa de ruído branco, ainda que útil, não é verdadeira e, formas mais robustas de predizê-lo (modelá-lo), representarão contribuição significativa à área de atenuação de ruídos.

Referências

ABMA, R.; CLAERBOUT, J. Lateral prediction for noise attenuation by t - x and f - x techniques. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 60, n. 6, p. 1887–1896, nov 1995. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.1443920>>. Citado na página 23.

ALAUDAH, Y.; ALREGIB, G. A curvelet-based distance measure for seismic images. In: *2015 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 4200–4204. Citado na página 69.

ALECU, A. et al. Information-theoretic analysis of dependencies between curvelet coefficients. In: *2006 International Conference on Image Processing*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 1617–1620. ISSN 1522-4880. Citado 5 vezes nas páginas 43, 46, 47, 53 e 73.

BAKKER, P.; VLIET, L. J. van; VERBEEK, P. W. Edge preserving orientation adaptive filtering. In: *Proceedings. 1999 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (Cat. No PR00149)*. [S.l.: s.n.], 1999. v. 1, p. 540 Vol. 1. ISSN 1063-6919. Citado na página 53.

BERTSEKAS, D.; TSITSIKLIS, J. *Introduction to Probability*. Athena Scientific, 2008. (Athena Scientific optimization and computation series). ISBN 9781886529236. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=yAy-PQAACAAJ>>. Citado na página 45.

BOUBCHIR, L.; FADILI, J. M. Multivariate statistical modeling of images with the curvelet transform. In: *Proceedings of the Eighth International Symposium on Signal Processing and Its Applications, 2005*. [S.l.: s.n.], 2005. v. 2, p. 747–750. Citado 5 vezes nas páginas 43, 46, 47, 53 e 73.

BOUBCHIR, L.; NAIT-ALI, A.; PETIT, E. Multivariate statistical modeling of images in sparse multiscale transforms domain. In: *2010 IEEE International Conference on Image Processing*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 1877–1880. ISSN 1522-4880. Citado na página 73.

BRUYNZEEL, J.; GULDENZOPF, E.; PICKARD, J. *Petroleum Exploration of NPRA, 1974-1981: Final Report*. Energy Management Division of Tetra Tech, Inc., 1982. Volume 1. (Petroleum exploration of NPRA, 1974-1981: final report, Volume 1). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=UJxPAQAIAAJ>>. Citado na página 60.

BURRUS, C.; GOPINATH, R.; GUO, H. *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A Primer*. Prentice Hall, 1998. (Prentice Hall Series in Advanced). ISBN 9780134896007. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=4DgZAQAIAAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 40.

CANDÈS, E. et al. Fast discrete curvelet transforms. *Multiscale Modeling & Simulation*, v. 5, n. 3, p. 861–899, 2005. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/05064182X>>. Citado 5 vezes nas páginas 27, 36, 37, 38 e 41.

CANDÈS, E. J.; DONOHO, D. L. *Curvelets: A surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges*. [S.l.], 1999. Disponível em: <<https://statistics.stanford.edu/research/curvelets-surprisingly-effective-nonadaptive-representation-objects-edges>>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 27.

- CANDÈS, E. J.; DONOHO, D. L. Ridgelets: a key to higher-dimensional intermittency? *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 357, n. 1760, p. 2495–2509, 1999. ISSN 1364-503X. Disponível em: <<http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/357/1760/2495>>. Citado na página 27.
- CANDÈS, E. J.; DONOHO, D. L. *Continuous Curvelet Transform: II. Discretization and Frames*. California, 2003. Disponível em: <<https://statistics.stanford.edu/sites/default/files/2003-31.pdf>>. Citado na página 32.
- CANDÈS, E. J.; DONOHO, D. L. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise C^2 singularities. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Wiley-Blackwell, v. 57, n. 2, p. 219–266, nov 2003. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/cpa.10116>>. Citado 4 vezes nas páginas 27, 28, 32 e 33.
- CANDÈS, E. J.; GUO, F. New multiscale transforms, minimum total variation synthesis: applications to edge-preserving image reconstruction. *Signal Processing*, v. 82, n. 11, p. 1519 – 1543, 2002. ISSN 0165-1684. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168402003006>>. Citado na página 28.
- CHANG, S. G.; YU, B.; VETTERLI, M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 9, n. 9, p. 1532–1546, Sep 2000. ISSN 1057-7149. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 72.
- CHANG, S. G.; YU, B.; VETTERLI, M. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 9, n. 9, p. 1522–1531, Sep 2000. ISSN 1057-7149. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 72.
- CHAURIS, H.; NGUYEN, T. Seismic demigration/migration in the curvelet domain. *GEOPHYSICS*, v. 73, n. 2, p. S35–S46, 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.2831933>>. Citado na página 23.
- COOKE, D. A.; SCHNEIDER, W. A. Generalized linear inversion of reflection seismic data. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 48, n. 6, p. 665–676, 1983. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.1441497>>. Citado na página 55.
- COOLEY, J. W.; TUKEY, J. W. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of Computation*, American Mathematical Society, v. 19, n. 90, p. 297–301, 1965. ISSN 00255718, 10886842. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2003354>>. Citado na página 37.
- CUNHA, A. L. D.; ZHOU, J.; DO, M. N. The nonsubsampling contourlet transform: Theory, design, and applications. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 15, n. 10, p. 3089–3101, Oct 2006. ISSN 1057-7149. Citado na página 72.
- DAUBECHIES, I. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 1992. (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics). ISBN 9781611970104. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=cwdjT3CWY1kC>>. Citado na página 29.

- de Franco, A. P. *Filtragem adaptativa de dados sísmicos via transformada Curvelet e estimativa local multinível de limites de corte*. Dissertação (Dissertação) — Universidade Estadual do Norte Fluminense (UENF), Julho 2014. Disponível em: <<http://cana.lenep.uenf.br/Dissertacoes/2014-MSC-ALLAN%20PEIXOTO%20DE%20FRANCO.pdf>>. Citado na página 79.
- DEIGHAN, A. J.; WATTS, D. R. Ground-roll suppression using the wavelet transform. *GEOPHYSICS*, v. 62, n. 6, p. 1896–1903, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/1.1444290>>. Citado na página 23.
- DO, M. N.; VETTERLI, M. Pyramidal directional filter banks and curvelets. In: *Proceedings 2001 International Conference on Image Processing (Cat. No.01CH37205)*. [S.l.: s.n.], 2001. v. 3, p. 158–161 vol.3. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 34.
- DONNO, D.; CHAURIS, H.; NOBLE, M. Curvelet-based multiple prediction. *GEOPHYSICS*, v. 75, n. 6, p. WB255–WB263, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/1.3502663>>. Citado na página 23.
- DONOHO, D. L. Unconditional bases are optimal bases for data compression and for statistical estimation. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, v. 1, n. 1, p. 100 – 115, 1993. ISSN 1063-5203. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1063520383710080>>. Citado na página 40.
- DONOHO, D. L.; DUNCAN, M. R. *Digital Curvelet Transform: Strategy, Implementation and Experiments*. [S.l.], 2000. Disponível em: <<https://statistics.stanford.edu/sites/default/files/2000-12.pdf>>. Citado na página 27.
- DONOHO, D. L.; JOHNSTONE, J. M. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, v. 81, n. 3, p. 425, 1994. Disponível em: <[+http://dx.doi.org/10.1093/biomet/81.3.425](http://dx.doi.org/10.1093/biomet/81.3.425)>. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 70.
- DOUMA, H.; HOOP, M. V. de. Leading-order seismic imaging using curvelets. *GEOPHYSICS*, v. 72, n. 6, p. S231–S248, 2007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.2785047>>. Citado na página 23.
- EPHRAIM, Y.; MALAH, D. Speech enhancement using a minimum-mean square error short-time spectral amplitude estimator. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 32, n. 6, p. 1109–1121, Dec 1984. ISSN 0096-3518. Citado na página 46.
- FEFFERMAN, C. A note on spherical summation multipliers. *Israel Journal of Mathematics*, v. 15, n. 1, p. 44–52, Mar 1973. ISSN 1565-8511. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02771772>>. Citado na página 28.
- FRAZIER, M.; JAWERTH, B.; WEISS, G. *Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces*. American Mathematical Society, 1991. (CBMS Regional Conference Series, no. 79). ISBN 9780821807316. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=maYDBgAAQBAJ>>. Citado na página 28.
- GE, Z. et al. Curvelet-transform-based random noise attenuation using energy mean scanning in f-k domain. In: *79th EAGE Conference and Exhibition 2017*. [S.l.: s.n.], 2017. Citado na página 24.

GOMES, V. et al. 2d poststack seismic data inversion with curvelet denoising preconditioning. In: *79th EAGE Conference and Exhibition 2017*. [s.n.], 2017. Disponível em: <<http://earthdoc.eage.org/publication/publicationdetails/?publication=88299>>. Citado na página 60.

GOMES, V. M. *Teste da sensibilidade dos algoritmos de inversão do traço a diversas ondaletas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Fluminense, 2014. Citado na página 54.

GÓRSZCZYK, A.; ADAMCZYK, A.; MALINOWSKI, M. Application of curvelet denoising to 2d and 3d seismic data — practical considerations. *Journal of Applied Geophysics*, v. 105, p. 78 – 94, 2014. ISSN 0926-9851. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0926985114000780>>. Citado 5 vezes nas páginas 24, 41, 65, 66 e 79.

HENNENFENT, G.; FENELON, L.; HERRMANN, F. J. Nonequispaced curvelet transform for seismic data reconstruction: A sparsity-promoting approach. *GEOPHYSICS*, v. 75, n. 6, p. WB203–WB210, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/1.3494032>>. Citado na página 23.

HENNENFENT, G.; HERRMANN, F. J.; NEELAMANI, R. Sparseness-constrained seismic deconvolution with curvelets. In: CSEG. *CSEG Annual Conference Proceedings*. CSEG, 2005. Disponível em: <<https://www.slim.eos.ubc.ca/Publications/Public/Conferences/CSEG/2005/Hennenfent05CSEGscs/Hennenfent05CSEGscs.pdf>>. Citado na página 23.

HERRMANN, F. J.; HENNENFENT, G. Non-parametric seismic data recovery with curvelet frames. *Geophysical Journal International*, Blackwell Publishing Ltd, v. 173, n. 1, p. 233–248, 2008. ISSN 1365-246X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-246X.2007.03698.x>>. Citado na página 23.

HERRMANN, F. J.; WANG, D.; VERSCHUUR, D. J. E. Adaptive curvelet-domain primary-multiple separation. *GEOPHYSICS*, v. 73, n. 3, p. A17–A21, 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.2904986>>. Citado na página 23.

HUTCHINSON, J. Culture, communication, and an information age madonna. *IEEE Professional Communication Society Newsletter*, v. 45, p. 1–7, 2001. Disponível em: <http://www.cs.cmu.edu/~chuck/lennapg/pcs_mirror/may_june01.pdf>. Citado na página 44.

IOUP, J. W.; IOUP, G. E. Noise removal and compression using a wavelet transform. In: _____. *SEG Technical Program Expanded Abstracts 1998*. [s.n.], 1998. p. 1076–1079. Disponível em: <<https://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.1820072>>. Citado na página 23.

JERISON, D. *Lecture notes for 18.103 Fourier Analysis*. 2013. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare. Disponível em: <<https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-103-fourier-analysis-fall-2013>>. Citado na página 31.

KAPPUS, M. E.; HARDING, A. J.; ORCUTT, J. A. A comparison of tau-p transform methods. *GEOPHYSICS*, v. 55, n. 9, p. 1202–1215, 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/1.1442936>>. Citado na página 23.

- KLITGORD, K. D.; SCHNEIDER, C. M. *Geophysical Data of the East Coast of the United States Northern Atlantic Margin: Velocity Analyses*. [S.l.], 1994. Disponível em: <<https://pubs.usgs.gov/of/1994/0192/report.pdf>>. Citado 3 vezes nas páginas 61, 153 e 154.
- KULLBACK, S.; LEIBLER, R. A. On information and sufficiency. *Ann. Math. Statist.*, The Institute of Mathematical Statistics, v. 22, n. 1, p. 79–86, 03 1951. Disponível em: <<https://doi.org/10.1214/aoms/1177729694>>. Citado na página 74.
- LEMARIÉ, P. G.; MEYER, Y. Ondelettes et bases hilbertiennes. *Revista Matemática Iberoamericana*, v. 2, n. 1-2, p. 1–18, 1986. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/39298>>. Citado na página 29.
- LI, J. H. et al. Wavelet-based higher order correlative stacking for seismic data denoising in the curvelet domain. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, PP, n. 99, p. 1–11, 2017. ISSN 1939-1404. Citado na página 24.
- LITTLEWOOD, J. E.; PALEY, R. E. A. C. Theorems on fourier series and power series. *Journal of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, s1-6, n. 3, p. 230–233, 1931. ISSN 1469-7750. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s1-6.3.230>>. Citado na página 28.
- LITTLEWOOD, J. E.; PALEY, R. E. A. C. Theorems on fourier series and power series (ii)†. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, s2-42, n. 1, p. 52–89, 1937. ISSN 1460-244X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.52>>. Citado na página 28.
- LITTLEWOOD, J. E.; PALEY, R. E. A. C. Theorems on fourier series and power series(iii). *Proceedings of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, s2-43, n. 1, p. 105–126, 1938. ISSN 1460-244X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1112/plms/s2-43.2.105>>. Citado na página 28.
- LONARDELLI, J. N. et al. Evaluation of oil production related effects through geomechanical modeling: A case study from marimbá field, campos basin, brazil. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 158, n. Supplement C, p. 186 – 201, 2017. ISSN 0920-4105. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920410517306435>>. Citado na página 59.
- LONG, Z.; WANG, Z.; ALREGIB, G. Seisim: structural similarity evaluation for seismic data retrieval. In: *Submitted to IEEE Global Conference on Signal and Information Processing (GlobalSIP)*. [s.n.], 2015. Disponível em: <http://cegp.ece.gatech.edu/wp-content/uploads/sites/564/2017/01/Long_ICCSPA2015.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 68.
- MA, J.; PLONKA, G. The curvelet transform. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 27, n. 2, p. 118–133, March 2010. ISSN 1053-5888. Citado 3 vezes nas páginas 23, 28 e 33.
- MA, J.; YU, S. Sparsity in compressive sensing. *The Leading Edge*, v. 36, n. 8, p. 646–652, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/tle36080646.1>>. Citado na página 53.
- MALLAT, S. *A Wavelet Tour of Signal Processing, Second Edition (Wavelet Analysis & Its Applications)*. Academic Press, 1999. ISBN 012466606X. Disponível em: <[https://www.amazon.com/Wavelet-Signal-Processing-Analysis-Applications/dp/012466606X%](https://www.amazon.com/Wavelet-Signal-Processing-Analysis-Applications/dp/012466606X%25)

3FSubscriptionId%3D0JYN1NVW651KCA56C102%26tag%3Dtechkie-20%26linkCode%3Dxm2%26camp%3D2025%26creative%3D165953%26creativeASIN%3D012466606X>. Citado 3 vezes nas páginas 27, 29 e 70.

MALLAT, S. G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 11, n. 7, p. 674–693, Jul 1989. ISSN 0162-8828. Citado na página 73.

MARFURT, K. J. et al. 3-d seismic attributes using a semblance-based coherency algorithm. *GEOPHYSICS*, v. 63, n. 4, p. 1150–1165, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/1.1444415>>. Citado na página 69.

MARQUARDT, D. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 11, n. 2, p. 431–441, 1963. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/0111030>>. Citado na página 55.

MARTIN, G. S. *The Marmousi2 model: Elastic synthetic data, and an analysis of imaging and AVO in a structurally complex environment*. Tese (Doutorado) — University of Houston, 2004. Disponível em: <<http://www.agl.uh.edu/pdf/theses/martin.pdf>>. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 122.

MCAULAY, R.; MALPASS, M. Speech enhancement using a soft-decision noise suppression filter. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 28, n. 2, p. 137–145, Apr 1980. ISSN 0096-3518. Citado na página 46.

MELROSE, R. *Lecture notes for 18.102 Introduction to Functional Analysis*. 2009. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare. Disponível em: <<https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-102-introduction-to-functional-analysis-spring-2009/>>. Citado na página 31.

MENG, K.; LI, J.; LI, Y. Noise suppression in the dual-tree complex wavelet domain for seismic signal. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, v. 7, n. 2, p. 353–359, Jun 2017. ISSN 2190-0566. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s13202-016-0272-4>>. Citado na página 23.

MENKE, W. *Geophysical data analysis: discrete inverse theory*. Academic press, 1989. Disponível em: <http://books.google.com/books?hl=pt-BR&lr=&id=RHAdIJrUXuC&oi=fnd&pg=PP1&dq=Geophysical-Data-Analysis--Discrete-Inverse-Theory--&ots=S6XVrQG6id&sig=2O_nlbxs1FWfcPG3VW9rb3hdd90>. Citado na página 54.

MEYER, Y.; RYAN, R. *Wavelets: Algorithms and Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993. (Miscellaneous Bks). ISBN 9780898713091. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=0vpQAAAAMAAJ>>. Citado na página 29.

NEELAMANI, R. et al. Coherent and random noise attenuation using the curvelet transform. *The Leading Edge*, v. 27, n. 2, p. 240–248, 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.2840373>>. Citado na página 24.

NGUYEN, T.; LIU, Y. Seismic noise attenuation using curvelet transform and dip map data structure. In: *79th EAGE Conference and Exhibition 2017*. [S.l.: s.n.], 2017. Citado na página 24.

- PIZURICA, A. *Image denoising using wavelets and spatial context modeling*. Tese (Doutorado) — Ghent University, June 2002. Disponível em: <<https://biblio.ugent.be/publication/522060/file/1874260>>. Citado 5 vezes nas páginas 40, 42, 46, 48 e 50.
- PIZURICA, A.; PHILIPS, W. Estimating the probability of the presence of a signal of interest in multiresolution single- and multiband image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 15, n. 3, p. 654–665, March 2006. ISSN 1057-7149. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 48.
- ROBINSON, E. A. *Predictive decomposition of time series with applications to seismic exploration*. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, July 1954. Disponível em: <<http://dspace.mit.edu/handle/1721.1/59629>>. Citado na página 54.
- RUSSELL, B. H. *Introduction to Seismic Inversion Methods*. Society of Exploration Geophysicists, 1988. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.9781560802303>>. Citado na página 55.
- RYAN, H. Ricker, ormsby, klauder, butterworth - a choice of wavelets. *CSEG Recorder*, v. 9, p. 24–25, 1994. Citado na página 58.
- SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, v. 27, n. 3, p. 379–423, July 1948. ISSN 0005-8580. Citado na página 75.
- SHEN, B.; SETHI, I. K.; BHASKARAN, V. Dct domain alpha blending. In: *Proceedings 1998 International Conference on Image Processing. ICIP98 (Cat. No.98CB36269)*. [S.l.: s.n.], 1998. v. 1, p. 857–861 vol.1. Citado na página 68.
- SILVA, L. C. d.; CUNHA, H. C. d. S. (Ed.). *Geologia do Estado do Rio de Janeiro: texto explicativo do mapa geológico do Estado do Rio de Janeiro*. 2. ed. CPRM - Serviço Geológico do Brasil, 2001. (Programa Levantamentos Geológicos Básicos do Brasil). Disponível em: <http://rigeo.cprm.gov.br/jspui/bitstream/doc/17229/4/rel_proj_rj_geologia.pdf>. Citado na página 60.
- SIMONCELLI, E. P.; ADELSON, E. H. Noise removal via bayesian wavelet coring. In: *Proceedings of 3rd IEEE International Conference on Image Processing*. [S.l.: s.n.], 1996. v. 1, p. 379–382 vol.1. Citado 4 vezes nas páginas 43, 44, 48 e 73.
- SMITH, H. F. A parametrix construction for wave equations with $c^{1,1}$ coefficients. *Annales de l'institut Fourier*, Association des Annales de l'Institut Fourier, v. 48, n. 3, p. 797–835, 1998. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/75304>>. Citado na página 28.
- STARCK, J.-L.; CANDÈS, E. J.; DONOHO, D. L. The curvelet transform for image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 11, n. 6, p. 670–684, Jun 2002. ISSN 1057-7149. Citado 6 vezes nas páginas 24, 27, 41, 51, 71 e 80.
- STARCK, J.-L.; DONOHO, D. L.; CANDÈS, E. J. Very high quality image restoration by combining wavelets and curvelets. In: *Proc. SPIE 4478, Wavelets: Applications in Signal and Image Processing IX*. [s.n.], 2001. v. 4478, p. 11. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1117/12.449693>>. Citado na página 71.

- STEIN, E.; MURPHY, T. *Harmonic Analysis: Real-variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*. Princeton University Press, 1993. (Monographs in harmonic analysis). ISBN 9780691032160. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ljcOSMK7t0EC>>. Citado na página 28.
- TANG, G.; MA, J. Application of total-variation-based curvelet shrinkage for three-dimensional seismic data denoising. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, v. 8, n. 1, p. 103–107, Jan 2011. ISSN 1545-598X. Citado na página 24.
- TATHAM, R. H.; KEENEY, J. W.; NOPONEN, I. Application of the tau-p transform (slant-stack) in processing seismic reflection data. *Exploration Geophysics*, v. 14, n. 3/4, p. 163–172, 1983. Disponível em: <<https://library.seg.org/doi/abs/10.1071/EG983163>>. Citado na página 23.
- TESSENS, L. et al. Context adaptive image denoising through modeling of curvelet domain statistics. *Journal of Electronic Imaging*, v. 17, n. 3, p. 033021–033021–17, 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1117/1.2987723>>. Citado 7 vezes nas páginas 24, 42, 44, 46, 47, 49 e 71.
- TESSENS, L. et al. Modeling curvelet domain inter-band image statistics with application to spatially-adaptive image denoising. In: *ProRISC 2006, Veldhoven, The Netherlands*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 208–213. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 47.
- TESSENS, L. et al. Spatially adaptive image denoising based on joint image statistics in the curvelet domain. *Wavelet Applications in Industrial Processing IV*, v. 6383, p. U163–U174, 2006. ISSN 0277-786X. Citado 3 vezes nas páginas 42, 44 e 47.
- ULRYCH, T. J.; SACCHI, M. D. *Information-based inversion and processing with applications*. Elsevier, 2005. v. 36. Disponível em: <<http://store.elsevier.com/product.jsp?isbn=9780080461342>>. Citado na página 54.
- VELHO, L.; FRERY, A. C.; GOMES, J. *Image Processing for Computer Graphics and Vision*. 2nd. ed. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2014. ISBN 1447160150, 9781447160151. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 66.
- VENTOSA, S.; RABESON, H.; DUVAL, L. Coherent noise removal in seismic data with redundant multiscale directional filters. In: *2011 19th European Signal Processing Conference*. [s.n.], 2011. p. 1150–1154. ISSN 2076-1465. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/7074218/>>. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 66.
- VERSTEEG, R. The marmousi experience: Velocity model determination on a synthetic complex data set. *The Leading Edge*, v. 13, n. 9, p. 927–936, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/1.1437051>>. Citado na página 58.
- WANG, J. et al. Seismic denoising in curvelet domain: An adaptive thresholding based on local variance analysis. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2013*. [s.n.], 2013. p. 4309–4313. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/segam2013-1154.1>>. Citado na página 24.
- WANG, Z. et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 13, n. 4, p. 600–612, April 2004. ISSN 1057-7149. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 68.

- WANG, Z.; SIMONCELLI, E. P. Translation insensitive image similarity in complex wavelet domain. In: *Proceedings. (ICASSP '05). IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2005*. [S.l.: s.n.], 2005. v. 2, p. 573–576. ISSN 1520-6149. Citado na página 68.
- WANG, Z.; SIMONCELLI, E. P.; BOVIK, A. C. Multiscale structural similarity for image quality assessment. In: *The Thrity-Seventh Asilomar Conference on Signals, Systems Computers, 2003*. [S.l.: s.n.], 2003. v. 2, p. 1398–1402 Vol.2. Citado na página 68.
- WELLAND, G. V. (Ed.). *Beyond Wavelets*. Elsevier Science, 2003. (Studies in Computational Mathematics). ISBN 9780080527802. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=o-gH6ReSiTgC>>. Citado na página 34.
- WIGGINS, R. A. ω -k filter design*. *Geophysical Prospecting*, Blackwell Publishing Ltd, v. 14, p. 427–440, 1966. ISSN 1365-2478. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2478.1966.tb02059.x>>. Citado na página 23.
- WOODS, J.; O'NEIL, S. Subband coding of images. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 34, n. 5, p. 1278–1288, Oct 1986. ISSN 0096-3518. Citado na página 73.
- YILMAZ, O. *Seismic Data Analysis: Processing, Inversion, and Interpretation of Seismic Data*. 2. ed. Society of Exploration Geophysicists, 2001. ISBN 9781560800941. Disponível em: <<http://books.google.co.nz/books?id=ceulx3JqYGUC>>. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 54.
- YU, M.; YAN, Z. Flexible surface multiple attenuation using the curvelet transform. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2011*. [s.n.], 2011. p. 3485–3489. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.3627922>>. Citado na página 23.
- ZHANG, R.; ULRICH, T. J. Physical wavelet frame denoising. *GEOPHYSICS*, v. 68, n. 1, p. 225–231, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/1.1543209>>. Citado na página 23.
- ZHDANOV, M. S. *Geophysical inverse theory and regularization problems*. Elsevier, 2002. v. 36. Disponível em: <<http://books.google.com/books?hl=pt-BR&lr=&id=tHtDETV7VCoC&oi=fnd&pg=PP2&dq=Geophysical+Inverse+Theory+and+Regularization+Problems&ots=n8k-2SUNIQ&sig=6thPbsrUJZsrqx1cmW02tgFJTM>>. Citado na página 54.
- ZHEN-AN, Y.; CHENG-YU, S.; JIE, T. Geologic-target amplitude and edge preserving oriented random noise elimination. In: _____. *SPG/SEG 2016 International Geophysical Conference, Beijing, China, 20-22 April 2016*. [s.n.], 2016. p. 198–201. Disponível em: <<https://library.seg.org/doi/abs/10.1190/IGCBeijing2016-058>>. Citado na página 24.
- ZUJOVIC, J.; PAPPAS, T. N.; NEUHOFF, D. L. Structural texture similarity metrics for image analysis and retrieval. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 22, n. 7, p. 2545–2558, July 2013. ISSN 1057-7149. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 69.

Apêndices

APÊNDICE A – Complemento à seção 2.2

Relembrando a distribuição Laplaciana *a priori* utilizada na seção 2.2, assim como as hipóteses associadas à significância dos coeficientes em uma subbanda curvelet (2.6), como já foi falado, a probabilidade dos coeficientes serem insignificantes, $P(H^0)$, é igual à área da parte central da distribuição em relação ao limiar de corte t :

$$P(H^0) = \int_{-t}^t f(\tilde{\mathbf{c}}_i) d\tilde{\mathbf{c}}_i. \quad (\text{A.1})$$

Substituindo a expressão da fdp 2.4 na equação acima e utilizando a simetria em $\tilde{\mathbf{c}}_i = 0$, obtém-se:

$$\int_{-t}^t f(\tilde{\mathbf{c}}_i) d\tilde{\mathbf{c}}_i = \frac{\lambda v}{2\Gamma(1/v)} \int_{-t}^t \exp(-|\lambda \tilde{\mathbf{c}}_i|^v) d\tilde{\mathbf{c}}_i = \frac{\lambda v}{\Gamma(1/v)} \int_0^t \exp(-(\lambda \tilde{\mathbf{c}}_i)^v) d\tilde{\mathbf{c}}_i. \quad (\text{A.2})$$

Realizando a substituição de variáveis,

$$x = (\lambda \tilde{\mathbf{c}}_i)^v \implies \tilde{\mathbf{c}}_i = \frac{x^{1/v}}{\lambda} \implies d\tilde{\mathbf{c}}_i = \frac{1}{\lambda v} x^{1/v-1} dx, \quad (\text{A.3})$$

na expressão mais a direita de A.2, tem-se:

$$\int_{-t}^t f(\tilde{\mathbf{c}}_i) d\tilde{\mathbf{c}}_i = \frac{1}{\Gamma(1/v)} \int_0^{(\lambda t)^v} x^{1/v-1} \exp(-x) dx, \quad (\text{A.4})$$

a qual, por definição, é a função Gamma incompleta $\Gamma_{\text{inc}}((\lambda t)^v, 1/v)$.

Trata-se agora das constantes de normalização A_0 e A_1 em 2.7. Por definição, a primeira é:

$$A_0 = \left(\int_{-t}^t \exp(-|\lambda \tilde{\mathbf{c}}_i|^v) d\tilde{\mathbf{c}}_i \right)^{-1} = \left(\frac{2\Gamma(1/v)}{\lambda v} \int_{-t}^t f(\tilde{\mathbf{c}}_i) d\tilde{\mathbf{c}}_i \right)^{-1} = \frac{\lambda v}{2\Gamma(1/v)\Gamma_{\text{inc}}((\lambda t)^v, 1/v)}; \quad (\text{A.5})$$

e a segunda:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\int_{-\infty}^{-t} \exp(-|\lambda \tilde{\mathbf{c}}_i|^v) d\tilde{\mathbf{c}}_i + \int_t^{\infty} \exp(-|\lambda \tilde{\mathbf{c}}_i|^v) d\tilde{\mathbf{c}}_i \right)^{-1} = \left(2 \int_t^{\infty} \exp(-|\lambda \tilde{\mathbf{c}}_i|^v) d\tilde{\mathbf{c}}_i \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{2\Gamma(1/v)}{\lambda v} 2 \int_t^{\infty} f(\tilde{\mathbf{c}}_i) d\tilde{\mathbf{c}}_i \right)^{-1} = \frac{\lambda v}{2\Gamma(1/v)} \left(1 - \int_{-t}^t f(\tilde{\mathbf{c}}_i) d\tilde{\mathbf{c}}_i \right)^{-1} \\ &= \frac{\lambda v}{2\Gamma(1/v) \left[1 - \Gamma_{\text{inc}}((\lambda t)^v, 1/v) \right]}. \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$