



Universidade Federal Fluminense
Instituto de Geociências
Dinâmica dos Oceanos e da Terra

FRANK CENCI BULHÕES

EFEITOS DA REGULARIZAÇÃO NA TOMOGRAFIA DE REFRAÇÃO

Niterói

2020



FRANK CENCI BULHÕES

EFEITOS DA REGULARIZAÇÃO NA TOMOGRAFIA DE REFRAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Dinâmica dos Oceanos e da Terra da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de Concentração: Geologia e Geofísica.

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Cetale Santos

Coorientador: Prof. Dr. Luiz Alberto Santos

Niterói

2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BIG
Gerada com informações fornecidas pelo autor

B933e Bulhões, Frank Cenci
Efeitos da Regularização na Tomografia de Refração /
Frank Cenci Bulhões ; Marco Antonio Cetale Santos, orientador
; Luiz Alberto Santos, coorientador. Niterói, 2020.
84 f. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Niterói, 2020.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPGDOT.2020.m.08738110709>

1. Sísmica. 2. Velocidade. 3. Refração. 4. Tomografia. 5.
Produção intelectual. I. Cetale Santos, Marco Antonio,
orientador. II. Santos, Luiz Alberto, coorientador. III.
Universidade Federal Fluminense. Instituto de Geociências.
IV. Título.

CDD -



EFEITOS DA REGULARIZAÇÃO NA TOMOGRAFIA DE REFRAÇÃO

FRANK CENCI BULHÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Dinâmica dos Oceanos e da Terra da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de Concentração: Geologia e Geofísica.

Aprovada em 14 de Julho de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marco Antonio Cetale Santos – Orientador
GISIS/DOT/UFF

Prof. Dr. Luiz Alberto Santos - Coorientador
PETROBRAS, UFF

Prof. Dr. Roger Matsumoto Moreira
GISIS/UFF

Prof. Dr. Rogério de Araújo Santos
PETROBRAS, UFF

Dr. Bruno Pereira Dias
PETROBRAS

Niterói
2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Elzira e Pascoal (*in memoriam*), que me deram a vida e fizeram todos os esforços para minha formação como indivíduo e profissional. À minha esposa Bruna Cristina, que além de grande amiga e companheira, sempre me apoiou e incentivou em todos os momentos, revisou o texto e fez sugestões valiosas na redação e formatação, além da paciência que teve comigo.

Agradeço à Petrobras através dos gerentes Francisco Aquino e Jonilton Pessoa e o coordenador Leonardo Matriciano Couto pela oportunidade e incentivo ao meu desenvolvimento profissional e de realizar o mestrado.

Aos orientadores Marco Antonio Cetale e Luiz Alberto, pela orientação, discussões, críticas e ajuda ao longo do mestrado e que foram fundamentais não só na pós-graduação e como profissional. Ao Cetale pelos aprendizados nas suas aulas e conselhos para o desenvolvimento acadêmico e estágio de docência, além das discussões sobre o Fluminense. Ao Luiz Alberto pelos aprendizados ao longo da vida profissional na Petrobras, durante os cursos de formação e avançado de geofísica, sempre transmitindo grande motivação pela busca de aperfeiçoamento. Agradeço à Universidade Federal Fluminense, por me proporcionar um ensino de qualidade. Sou grato aos docentes e funcionários do Departamento de Geociências.

Aos colegas e amigos de Petrobras com conselhos, discussões e apoios, em especial: Guilherme Amorim (no aprendizado nos meus primeiros anos como geofísico na Petrobras e grande incentivador), aos compadres Rodrigo Andrade e Rejhane Cunha, a Gleidson Diniz, Renan Melo, Jorge Luiz Rangel, Rosângela Castro, Maria Taís Lima, Alan Albano Souza, Victor Mello, Thiago Yamamoto, Alexandre Maul, Leonardo Teixeira, João Batista Boechat, Vera Sales, Érica Cristina e Claudir Francisco. Aos professores e colegas de Petrobras Rogério Santos e Djalma Soares pelos aprendizados.

Ao Victor Almeida por valiosas ajudas, nos esclarecimentos de dúvidas e pelas sugestões e dicas na resolução das dificuldades encontradas na execução do trabalho. Aos integrantes do departamento de Geociências da UFF, agradeço pelas discussões e sugestões e as amizades feitas, principalmente a Felipe Timóteo, Edmarley Ramos, Adriano de Souza Jr., Carlos Claudino, Fábio Pontes, Flávia Pontes, Eloise Policarpo, Mário Martins, David Freitas, Fabrício Augusto, Flávio Mesquita, Guilherme Lenz, Danielle Tostes, Úrsula Belém, Ana Schanzembach, Roberto Miamoto e Wagner Lupinacci.

“Um homem não deveria nunca parar de aprender, nem no seu último dia de vida”. – Moisés Maimônides (Córdoba, 1138-1204).

RESUMO

Na sismica exploratória de hidrocarbonetos, soluções precisas de subsuperfície rasa são fundamentais para a identificação de estruturas e armadilhas estratigráficas. A utilização de velocidades estimadas por tomografia de primeiras quebras é um método robusto para identificação de tais feições em subsuperfície. Regularização é uma abordagem comum para estabilizar problemas inversos mal-postos, que em termos práticos corresponde a restringir as possíveis soluções para a inversão. Para isso, um termo de regularização é adicionado na função de erro tomográfica para resolução da não-unicidade do problema geofísico inverso. O objetivo deste estudo é avaliar o algoritmo de tomografia de refração, os efeitos da regularização e seus efeitos nos modelos de velocidades sísmicas resultantes. O trabalho baseia-se, metodologicamente, em um estudo de caso. As regularizações testadas foram a Tikhonov de ordem 1, as variantes de ordem 1 e ordem 2, e a regularização de Berryman. Utilizou-se o programa desenvolvido pelo Grupo de Modelagem, Imageamento e Inversão Sísmica da Universidade Federal Fluminense, em linguagem Fortran. O programa de tomografia é baseado no traçamento de raios de Podvin. A geometria de aquisição 2-D para parametrização da modelagem direta consiste com 176 fontes com intervalo de 40 m e 150 geofones ao longo de uma reta de 2500 m, com intervalos de 10 m, sendo o primeiro geofone a 100 m da fonte. O método de cálculo da matriz de tempo de trânsito utiliza equação eikonal por diferenças finitas. O modelo de velocidade utilizado consiste em um sintético baseado numa geologia de fundo marinho raso com estrutura de canal, discretizado em células com um espaçamento uniforme de 10 m. Comparou-se o modelo de velocidade verdadeiro com três camadas, com velocidades de 1500 m/s (água), 2000 m/s e 2500 m/s com os resultados da tomografia de tempo de trânsito sem regularização com a utilização de métodos de regularização. Os tempos de trânsito para tomografia foram obtidos por modelagem direta das três camadas, com o mesmo algoritmo usado na tomografia para cálculo do tempo de trânsito. Conclui-se que: 1) a tomografia apresenta resultados melhores com a aplicação da regularização em termos de definição e estruturas menos distorcidas; 2) a regularização de Tikhonov de segunda ordem e Berryman apresentaram maior velocidade de convergência com melhoria no modelo de velocidade e 3) o teste de sensibilidade dos parâmetros mostra o quanto uma escolha não adequada pode distorcer as estruturas geológicas.

Palavras-chave: sismica, velocidade, refração, tomografia, regularização.

ABSTRACT

In exploration seismic, accurate shallow surface solutions are essential for mapping bas-relief structures and stratigraphic traps. Such features can be identified through subsurface seismic velocity, which the first break tomography can robustly estimate. A common approach to stabilize the ill-posed inverse problem is to apply regularization, which in practice corresponds to restrict possible solutions for the inverse problems. Thus, a regularization term is often incorporated into the tomographic error function to resolve the non-uniqueness of the inverse geophysical problem. The objective of this work is to evaluate the refraction tomography algorithm, the regularization effects and to analyze their effects on the resulting seismic velocities. The study was based, methodologically, on a case study. The regularizations tested in this work were Tikhonov of order 1, the variants of order 1 and order 2, and Berryman regularization. The Fortran language program created by the Seismic Imaging and Inversion Group of Universidade Federal Fluminense was used. The tomography program is based on Podvin's ray tracing. The 2-D acquisition geometry for parameterization of the direct modeling consists of 176 sources with a 40 m interval and 150 geophones along a 2500 m line, interval 10 m, the first geophone at 100 m from the source. Obtaining the travel time matrix uses finite differences scheme with the eikonal equation for the first arrivals, computation of the tomographic matrix and application of the regularization algorithm. The velocity model consists of a synthetic based on a shallow seabed channel geology, discretized into cells with a uniform spacing of 10 m. The true model that contains three layers and a seabed channel structure, with velocities of 1500 m/s (water), 2000 m/s and 2500 m/s with the results of transit time tomography without regularization with regularization schemes. Transit times for tomography were obtained by direct modeling of this model, with the same algorithm used in tomography to calculate transit time. It is concluded from this work that: 1) the results of the tomography show better results with better definition and less distortion of the structures with the application of regularization; 2) Tikhonov regularization of order 2 and Berryman showed faster convergence with improvement in the velocity model and 3) the parameter sensitivity test shows how much an inappropriate choice can distort geological structures.

KeyWords: seismic; velocity; refraction; tomography, regularization

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação do sismograma com os principais eventos registrados. Fonte: Modificado de Fraga (2016).	6
Figura 2: Seção sísmica que passa por três poços e seus respectivos perfis sônicos.	7
Figura 3: Posições sucessivas das frentes de ondas diretas e refratadas em um	9
Figura 4: Curvas tempo versus distância para a onda direta e a onda refratada.....	9
Figura 5: Trajetória de um raio para uma onda refratada em um modelo com três camadas.....	11
Figura 6: Curva tempo versus distância para as ondas direta e frontais de dois refratores horizontais.	12
Figura 7: Curva t-x para refrator com sinclinais e anticlinais.	13
Figura 8: Esquema com representação de problemas direto e inverso.....	14
Figura 9: Ilustração demonstrando um raio percorrendo um modelo 2-D de células de vagarosidades homogêneas.....	18
Figura 10: Fluxo geral de tomografia sísmica.....	20
Figura 11: Fluxo para inversão tomográfica utilizando modelo sintético.	21
Figura 12: Seção de velocidade plano paralelo horizontal com os raios refratados nas interfaces das camadas.	23
Figura 13: Fluxo geral da tomografia sísmica de refração.	23
Figura 14: Janela do <i>software</i> Zont2D com as linhas de tempo originais e as corrigidas pela tomografia de refração e abaixo seção da velocidade.....	24
Figura 15: Quadro comparativo entre os softwares de tomografia de refração.....	24
Figura 16: Modelo de canal raso real e o resultado pela tomografia de refração.....	27
Figura 17: Modelo de velocidade com uma camada e anomalia de velocidade. (a) modelo real e (b) resultado da tomografia.	27
Figura 18: Modelo de velocidade com duas camadas e anomalia (a) modelo real (b) modelo obtido pela tomografia.	28
Figura 19: Representação esquemática de um problema mal –posto.....	29
Figura 20: Representação com o modelo de velocidade real e a geometria de aquisição.	39
Figura 21: Tempo-trânsito fonte-receptor.	39
Figura 22: Três cenários de modelo inicial da tomografia de refração.	41
Figura 23: Modelo Inicial de entrada da tomografia de refração.	42
Figura 24:(a) Modelo de velocidade real e (b) Resultado da Tomografia sem aplicar a regularização.	42
Figura 25: Diferença entre a velocidade calculada pela tomografia sem regularização e o modelo real.	43
Figura 26: Representação esquemática da matriz tomográfica construída a partir de um modelo discretizado por 6 células regulares.	44

Figura 27: Exemplo da matriz de sensibilidade construída a partir de um modelo discretizado por células regulares com 3 colunas e 2 linhas.....	44
Figura 28: Seções com o modelo de velocidade resultantes da tomografia para os parâmetros de regularização de Tikhonov de 1ª ordem (a) $\lambda=10^{-3}$, (b) $\lambda=10^{-4}$, (c) $\lambda=10^{-5}$, (d) $\lambda=10^{-8}$	47
Figura 29: (a) Modelo de velocidade inicial e (b) Modelo de velocidade resultante da 2ª iteração tomográfica.	50
Figura 30: Modelos de velocidade resultantes da (a) iteração 15 e (b) iteração 16.	51
Figura 31: Seções de velocidade resultantes da tomografia usando a regularização Tikhonov de 1ª ordem com componente horizontal. (a) $\lambda=10^3$, (b) $\lambda=10^2$, (c) $\lambda=10$, (d) $\lambda=1$, (e) $\lambda=10^{-1}$, (f) $\lambda=10^{-2}$, (g) $\lambda=10^{-8}$	52
Figura 32: Diagrama dos tempos de trânsito entre fontes e receptores (a) registrados pelo modelo real (dado) e (b) calculado pela tomografia na 40ª iteração. (c) diferença entre o tempo de trânsito registrado e o calculado.....	53
Figura 33: Resultado da tomografia usando regularização de Tikhonov de ordem 1 com esquema progressivo com os parâmetros (a) $\lambda=10^3$; (b) $\lambda=10^2$; (c) $\lambda=10^1$; (d) $\lambda=1$; (e) $\lambda=10^{-1}$	56
Figura 34: Seções de velocidade resultantes da tomografia com regularização de Tikhonov de 2ª ordem com o parâmetro (a) $\lambda=1000$, (b) $\lambda=100$, (c) $\lambda=10$, (d) $\lambda=1$ (e) $\lambda=0,1$	59
Figura 35: (a) Modelo real, (b) Tomografia sem regularização e Tikhonov (c) ordem 1, (d) ordem 1 componente horizontal, (e) ordem 1 esquema progressivo e (f) ordem 2.	62
Figura 36: Seção vertical com as velocidades intervalares e média real e o resultado da tomografia para diferentes cenários de regularização.....	63
Figura 37: Seção vertical com as velocidades intervalares e média real e o resultado da tomografia para diferentes cenários de regularização.....	63
Figura 38: Seção vertical com as velocidades intervalares e média real e o resultado da tomografia para diferentes cenários de regularização.....	64
Figura 39: Seção vertical com as velocidades intervalares e média real e o resultado da tomografia para diferentes cenários de regularização.....	64
Figura 40: Seção horizontal com as velocidades intervalares e média real e o resultado da tomografia para diferentes cenários de regularização.....	65
Figura 41: Seção horizontal com as velocidades intervalares e média real e o resultado da tomografia para diferentes cenários de regularização.....	65
Figura 42: Seção horizontal com as velocidades intervalares e média real e o resultado da tomografia para diferentes cenários de regularização.....	65
Figura 43: Seção horizontal com as velocidades intervalares e média real e o resultado da tomografia para diferentes cenários de regularização.....	66
Figura 44: Histograma de δV para os casos (a) sem regularização e usando Tikhonov (b) ordem 1, (c) ordem 1 componente horizontal, (d) ordem 1 esquema progressivo e (e) ordem 2.	67

Figura 45: Seções de velocidade obtidas pela tomografia usando regularização de Berryman. (a) 10^{-1} , (b) 10^{-2} , (c) 10^{-3} , (d) 10^{-4} , (e) 10^{-5} , (f) 10^{-6} , (g) 10^{-7} , (h) 10^{-8}	71
Figura 46: Seções de velocidade resultantes da tomografia com as regularizações (a) Berryman; (b) Tikhonov ordem 1 componente horizontal; (c) Tikhonov ordem 1 esquema progressivo e (d) Tikhonov ordem 2.....	74

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Comparação entre os conceitos de refração e reflexão.	8
Quadro 2: Parâmetros da geometria de aquisição.	38
Quadro 3: Resumo das regularizações aplicadas com as respectivas estatísticas sobre resíduo na 40ª iteração.	73
Quadro 4: Tempo médio de processamento computacional para cada cenário de regularização.	75

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Comparação dos dados das publicações na base Scopus utilizando as palavras refração e reflexão.....	3
Gráfico 2: Evolução dos trabalhos publicados na base Scopus sobre sísmica de refração (curva azul) e sísmica de reflexão (curva laranja).....	3
Gráfico 3: Distribuição das publicações por área que utilizam regularização. Fonte: Base Scopus (2020).	29
Gráfico 4: Gráfico do resíduo para diferentes cenários de modelo inicial.	41
Gráfico 5: Variação do resíduo da inversão tomográfica sem regularização em função da iteração.	43
Gráfico 6: Elementos não-nulos da matriz tomográfica em função da iteração da inversão tomográfica sem regularização.	45
Gráfico 7: Evolução do resíduo do tempo de trânsito em função da iteração da tomografia usando regularização de Tikhonov de 1ª ordem.	46
Gráfico 8: Número de elementos não-nulos da matriz tomográfica em função da iteração tomográfica utilizando diferentes parâmetros de regularização de Tikhonov de 1ª ordem.	47
Gráfico 9: Evolução do resíduo do tempo de trânsito em função da iteração da tomografia usando regularização de Tikhonov de 1ª ordem com componente horizontal.	48
Gráfico 10: Resíduo RMS do tempo de trânsito em função do parâmetro de regularização de Tikhonov de 1ª ordem com componente horizontal.	49
Gráfico 11: Quantidade de elementos não-nulos da matriz tomográfica em função da iteração para regularização de Tikhonov de 1ª ordem componente horizontal.	50
Gráfico 12: Evolução do resíduo do tempo de trânsito em função da iteração da tomografia usando regularização de Tikhonov de 1ª ordem com esquema progressivo.....	54
Gráfico 13: Resíduo RMS do tempo de trânsito em função do parâmetro de regularização de Tikhonov de 1ª ordem com esquema progressivo.	55
Gráfico 14: Número de elementos não-nulos da matriz tomográfica em função da iteração utilizando regularização de Tikhonov de 1ª ordem com esquema progressivo.....	55
Gráfico 15: Evolução do resíduo do tempo de trânsito em função da iteração da tomografia usando regularização de Tikhonov de 2ª ordem.	57
Gráfico 16: Resíduo RMS do tempo de trânsito em função do parâmetro de regularização de Tikhonov de 2ª ordem.	58
Gráfico 17: Número de elementos não-nulos da matriz tomográfica em função da iteração utilizando regularização de Tikhonov de 2ª ordem.	58
Gráfico 18: Resíduo RMS do tempo de trânsitos em função do parâmetro de regularização.....	60
Gráfico 19: Resíduo RMS do tempo de trânsito em função da iteração para os casos com e sem regularização.	60

Gráfico 20: Quantidade de elementos não-nulos da matriz tomográfica em função do parâmetro de regularização para as regularizações de Tikhonov.....	61
Gráfico 21: Erro RMS da velocidade calculada pela tomografia em função do parâmetro λ para os respectivos casos de regularização de Tikhonov utilizados.	68
Gráfico 22: Gráfico da evolução do resíduo do tempo de trânsito em função da iteração da tomografia para os cenários de parâmetros de regularização de Berryman.....	69
Gráfico 23: Evolução dos termos não-nulos da matriz tomográficas em função da iteração da inversão tomográfica para os cenários de parâmetro de regularização de Berryman.	69
Gráfico 24: Resíduo RMS do tempo de trânsito em função do parâmetro λ de regularização de Berryman.	70
Gráfico 25: Gráfico do erro RMS das velocidades calculadas em função do parâmetro de regularização de Berryman.	70
Gráfico 26: Gráfico do resíduo em função da iteração, sem regularização e com as regularizações de Tikhonov de ordem 1 e 2 e Berryman.	72
Gráfico 27: Elementos não-nulos da matriz tomográfica em função dos passos para os cenários Sem regularização, utilizando Berryman e Tikhonov ordem 2.	74

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FWI - *Full Waveform Inversion* (Inversão da Forma Completa da Onda).

GISIS – Grupo de Imageamento e Inversão Sísmica

L1 – Norma L1

L2 – Norma L2

MVA - *Migration Velocity Analysis* (Análise de Velocidade de Migração).

RMS - *Root Mean Square* (Raiz Média Quadrática).

TOMO_GISIS - Programa de Tomografia de Refração desenvolvido pelo GISIS

TV – *Total Variation* (Variação Total)

LISTA DE SÍMBOLOS

α Letra alfa minúscula

δ Letra grega delta minúscula

Δ Letra grega delta maiúscula

λ Letra grega lambda minúscula

τ Letra grega tau minúscula

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 MOTIVAÇÃO.....	4
1.2 OBJETIVO DO TRABALHO.....	4
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	5
1.4 METODOLOGIA.....	5
2. REFERENCIAL TEÓRICO.....	6
2.1 SÍSMICA DE REFRAÇÃO.....	6
2.2 PROBLEMA DIRETO E INVERSO.....	13
2.3 PROBLEMA MAL-POSTO.....	15
2.4 TOMOGRAFIA.....	17
2.4.1 Modelagem Sintética.....	20
2.5 TOMOGRAFIA DE REFRAÇÃO.....	22
2.5.1 Programa de Modelagem Sísmica de Refração TOMO_GISIS.....	25
2.6 REGULARIZAÇÃO.....	28
2.6.1 Regularização de Tikhonov.....	30
2.6.2 Regularização de Berryman.....	33
2.6.3 Regularização Total variation (TV).....	35
3. ESTUDO DE CASO SOBRE A REGULARIZAÇÃO DA TOMOGRAFIA DE REFRAÇÃO	
38	
3.1 MODELO INICIAL.....	39
3.2 ESTUDO DO EFEITO DA REGULARIZAÇÃO.....	42
3.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	43
3.3.1 Regularização de Tikhonov.....	45
3.3.1.1 Regularização de Tikhonov de ordem 1.....	45
3.3.1.2 Regularização de Tikhonov De Ordem 1 apenas Componente Horizontal.....	48
3.3.1.3 Regularização de Tikhonov de ordem 1 usando esquema progressivo.....	54
3.3.1.4 Regularização de Tikhonov de ordem 2.....	56
3.3.1.5 Discussões sobre os cenários de regularização de Tikhonov.....	59
3.3.2 Regularização de Berryman.....	68
3.3.3. Comparação do tempo computacional dos estudos realizados.....	75
4. CONCLUSÃO.....	76
REFERÊNCIAS.....	78

1. INTRODUÇÃO

A maioria dos estudos geofísicos trata da solução de problemas inversos uma vez que aquisições de medidas diretas das propriedades físicas são onerosas. Além disso, medidas diretas, de modo geral, estão restritas a áreas limitadas espacialmente e de difícil extrapolação para toda a área de interesse com a acurácia necessária, mesmo com a utilização de métodos geoestatísticos.

Desde o início do século XX, na geofísica de exploração de hidrocarbonetos, os métodos sísmicos são os mais utilizados. Entre o final do século XX e início do XXI ocorreu um grande avanço no setor de óleo e gás com a utilização em larga escala de dados de levantamentos sísmicos 3-D. O aumento das capacidades computacionais gera avanços que aceleraram o processamento de dados sísmicos em profundidade (WOODWARD *et al.*, 2008). Estudos realizados por Woodward *et al.* (2008) mostram que a partir da década de 1990 ocorreram avanços dos métodos numéricos na resolução dos modelos, tais como a incorporação dos efeitos anisotrópicos e ao maior emprego de inversões guiadas pelo dado que inversões governadas por interpretações e modelos (SANTOS, 2012). Esses avanços só foram possíveis com o aumento do poder computacional, tanto em processamento como em capacidade de armazenamento (memória) de dados (SANTOS, 2012).

O desenvolvimento de métodos eficientes e precisos é constantemente necessário para melhorar a modelagem sísmica em diferentes situações, especialmente em meios geológicos complexos. Duas correntes principais de métodos numéricos foram desenvolvidas e estudadas intensivamente para cumprir esse objetivo: os métodos computacionais diretos e a teoria dos raios (CHAI *et al.*, 2016). Entre os métodos computacionais diretos enquadram-se:

- diferenças finitas (ALFORD *et al.*, 1974; VIRIEUX, 1984);
- pseudo-espectrais (KOLSLOFF e BAYSAL, 1982; CARCIONE, 1994);
- elementos de fronteira (BOUCHON e SANCHEZ-SESMA, 2007);
- elementos finitos (BAO *et al.*, 1998);
- elementos espectrais (KOMATITSCH e TROMP, 1999; KOMATITSCH *et al.*, 2005; TROMP *et al.*, 2008).

Os métodos de diferenças finitas são provavelmente os mais utilizados na modelagem sísmica (GRAVES, 1996; OLSEN e ARCHULETA, 1996; YANG *et al.*, 2002), mas com limitações da dispersão numérica e tamanho numérico finito das grades, como comentado por

Virieux (1986). Os métodos de elementos finitos podem lidar facilmente com limites naturais ou interfaces internas descontínuas em meios de fundo e, portanto, são adequados para modelos em subsuperfície com estruturas geológicas complexas. No entanto, estes geralmente têm altos custos computacionais e de memória, o que dificulta o uso em casos de alta dimensão ou modelagem em grande escala. Outra categoria de métodos numéricos na modelagem sísmica é baseada na teoria dos raios (CERVENY, 2001; POPOV, 2002; ENGQUIST e RUNBORG, 2003). Comparados aos métodos computacionais diretos, os métodos baseados em raios são menos restritos à carga de memória e aos custos computacionais da propagação de ondas de alta frequência (CHAI *et al.*, 2016).

Conforme relatado por Sheriff (1995), Mohorovičić, em 1909 identificou (ou postulou), em estudos sismológicos a existência das ondas sísmicas refratadas. A técnica de ondas refratadas auxiliou nas décadas de 1920 e 1930 na identificação de domos salinos no Golfo do México (TELFORD *et al.*, 1990). Na literatura os termos *head waves*, *conical waves* e *lateral waves* são os mais comuns nomes atribuídos às ondas refratadas.

Soluções precisas em subsuperfície rasa são importantes na sísmica de exploração para o mapeamento de estruturas de baixo-relevo e identificação de armadilhas estratigráficas. Tais feições estruturais podem ser identificadas através da velocidade de propagação em subsuperfície onde a tomografia de refração realizar uma estimativa de modo rápido e robusto, além de ser atraente por causa do baixo custo operacional de campo e fácil interpretação dos dados.

A sísmica de refração tem como principais áreas de aplicações:

- Pequena escala: geotecnia, ambiental, arqueológica, aterros, lençol freático, camada rochosa, no mapeamento estratigráfico;
- Escala média: arquitetura da bacia sedimentar, na estimativa da profundidade do embasamento;
- Larga escala: estrutura da crosta e manto, descontinuidade Mohorovičić e conversão tempo-profundidade de dados sísmicos.

Dobecki e Romig (1985) observaram que os levantamentos e estudos em sísmica de reflexão substituiriam os de refração como o método predominante para estudos de engenharia de águas subterrâneas. Fazendo-se uma análise bibliométrica na base Scopus, o número de publicações referentes à sísmica de reflexão equivale a aproximadamente 80% enquanto de refração é em torno de 20% conforme mostrado no Gráfico 1.

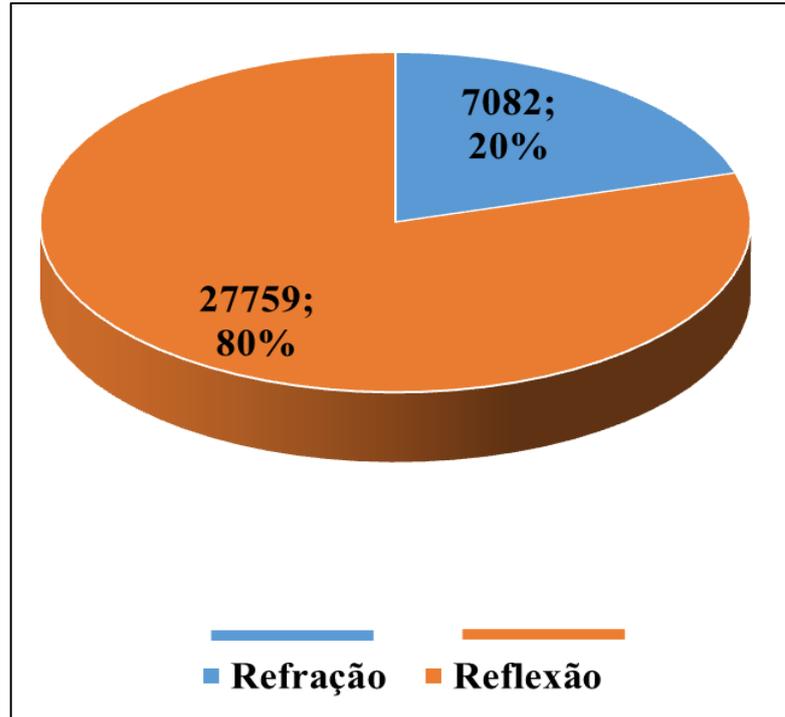


Gráfico 1: Comparação dos dados das publicações na base Scopus utilizando as palavras refração e reflexão.

Fonte: Retirado, pelo autor, do Scopus dia 21 de janeiro de 2020.

Segundo o mesmo levantamento na base Scopus, a partir dos anos 1980 as publicações e estudos sobre sismica de reflexão tornaram-se predominantes em relação aos de sismica de refração. Conforme apresentado no Gráfico 2, o número de artigos publicados sobre sismica de reflexão em 2018 é da ordem de 1400, enquanto os de refração foram em torno de 200.

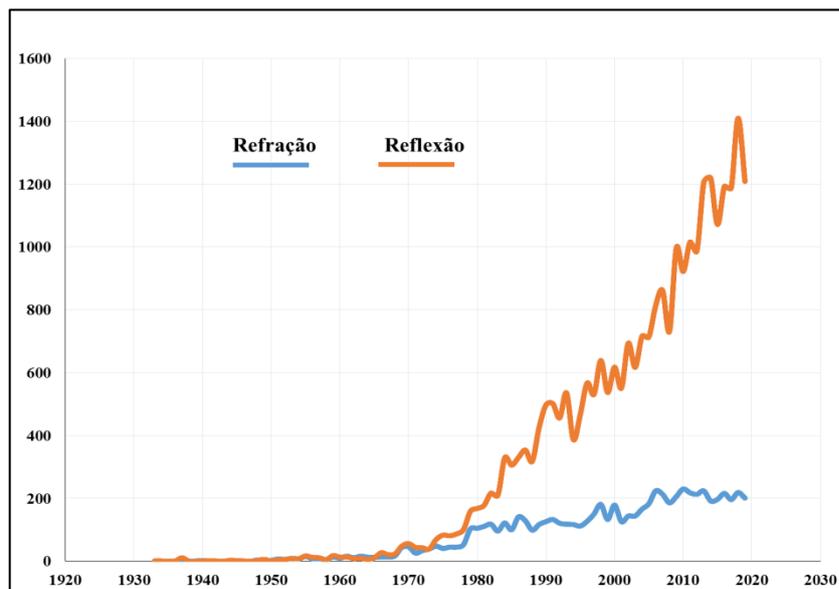


Gráfico 2: Evolução dos trabalhos publicados na base Scopus sobre sismica de refração (curva azul) e sismica de reflexão (curva laranja).

Fonte: Retirado do Scopus dia 21 de janeiro de 2020.

1.1 MOTIVAÇÃO

A obtenção das informações e distribuição de velocidade em subsuperfície rasa é um desafio na geofísica de exploração, pois existe uma grande escassez dessas informações em perfis de poços, seja por razões operacionais ou econômicas. As informações das porções rasas dos modelos de velocidade são essenciais no imageamento sísmico e na conversão de tempo-profundidade para os setores de interpretações. A tomografia de primeiras quebras é uma técnica que pode trazer as informações sísmicas de subsuperfície rasa de modo rápido e robusto, tornando relevante e motivando a realização de um estudo mais aprofundado e técnico na investigação sobre os produtos da tomografia de refração.

Regularização é indispensável nos problemas de inversão sísmica. Com base nisso, a técnica de regularização de Tikhonov em geral é usada nos problemas geológicos para garantir a suavidade horizontal das propriedades. Desse modo este estudo busca contribuir para uma maior compreensão sobre como aplicar a regularização da tomografia.

Além disso, o presente estudo decorreu do trabalho de construção de modelos regionais de velocidade para conversão tempo-profundidade em escala de bacias a partir da metodologia desenvolvida por Bulhões *et al.* (2014), no qual diversos tipos de dados sísmicos são agrupados. Aliado a isso, a tomografia de refração traz uma estimativa da velocidade na porção rasa de forma mais robusta e rápida.

Outra motivação para esse estudo ocorreu ao analisar as dissertações de mestrado de Almeida (2013) e Capucci (2013), onde se observou um *gap* na análise sistemática dos métodos de regularização e seus parâmetros, aplicadas à tomografia e, além disso, uma comparação entre os métodos de Tikhonov e Berryman de forma a complementar os seus estudos.

1.2 OBJETIVO DO TRABALHO

O objetivo geral deste estudo é avaliar a aplicabilidade da tomografia de refração em superfície rasa.

Já os objetivos específicos são: investigar os impactos da regularização na tomografia sísmica de refração e analisar os efeitos dessa regularização nas velocidades sísmicas resultantes. Esse estudo tem como motivação contribuir com melhorias, testando e validando o código do Almeida (2013), implementando essa avaliação de sensibilidade tanto em Tikhonov quanto em Berryman e comparar os impactos no modelo de velocidade.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho é dividido da seguinte forma: Primeiro é apresentada uma revisão bibliográfica sobre os conceitos de sísmica de refração, tomografia, implementação computacional e regularização. No estágio seguinte, o algoritmo tomográfico é testado para três exemplos. Na terceira etapa é mostrada uma aplicação de estudo de caso em ambiente marinho raso sobre a regularização da tomografia de refração e seus efeitos. Por fim, são avaliados os efeitos das regularizações de Tikhonov (TIKHONOV e ARSENIN, 1977) e Berryman (BERRYMAN, 1991), com estudo de sensibilidade da parametrização.

1.4 METODOLOGIA

A partir de uma análise bibliográfica de caráter exploratório buscou-se informações para o desenvolvimento do referencial teórico e realizou-se um estudo de caso em um modelo de velocidade 2-D em ambiente costeiro, de estrutura rasa, nas proximidades do sul de Boston, Massachusetts (ZHANG e TOKSÖZ, 1998). O modelo de velocidade contém três camadas e estrutura de um canal de fundo marinho, com velocidades de 1500 m/s (água), 2000 m/s e 2500 m/s e foi usado como métrica. Utilizou-se o programa de tomografia TOMO_GISIS em linguagem Fortran criado pelo Grupo de Modelagem, Imageamento e Inversão Sísmica da Universidade Federal Fluminense (ALMEIDA, 2013) para testar os parâmetros de regularização e avaliar como isso afetou o modelo de velocidade final. Aplicou-se uma variação dos parâmetros para cinco tipos de regularização, quatro referentes à regularização de Tikhonov e uma de Berryman. Ademais, por meio de gráficos analisou-se o comportamento da convergência da tomografia para cada parâmetro.

Utilizou-se neste estudo, para as avaliações das regularizações tomográficas, um computador notebook modelo HP Pavilion dv5 de processador MD Athlon™ IIP320 Dual-Core de 2,10 GHz e memória RAM de 3,00 GB. Ademais, os processos foram executados em uma máquina virtual com sistema operacional Ubuntu (64-bit), de memória virtual 1.024 MB e memória de vídeo 16 MB.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 SÍSMICA DE REFRAÇÃO

Os primeiros eventos que são registrados nos sismogramas são as ondas diretas e refratadas (TELFORD *et al.*, 1990), conforme esquematizado na Figura 1. Devido a essa característica, a utilização do dado de refração se torna vantajosa para ser utilizada na interpretação de dados sísmico e com isso melhorar a acurácia na estimativa do tempo de trânsito das primeiras chegadas (TELFORD *et al.*, 1990).

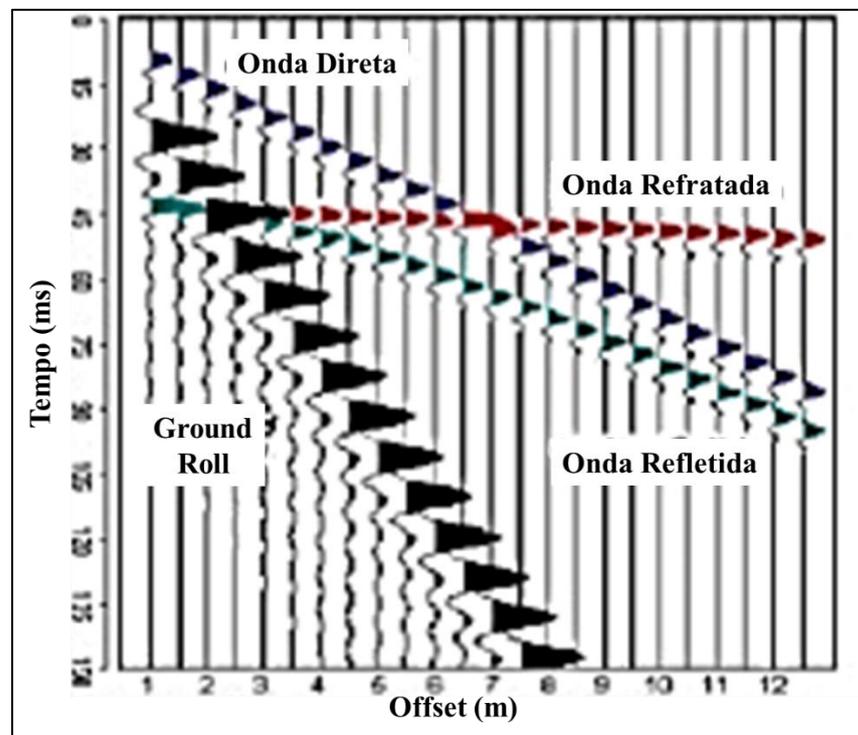


Figura 1: Representação do sismograma com os principais eventos registrados.
Fonte: Modificado de Fraga (2016).

A modelagem de velocidade sísmica para as camadas rasas é uma das principais aplicações da interpretação das ondas refratadas. O modelo de velocidade calculado a partir das ondas refratadas é fundamental nos processamentos sísmicos terrestres para correção estática (LINES; NEWRICK, 2004), cujo modelo de velocidade para as camadas de profundidade rasa corresponde às zonas de intemperismo (YILMAZ, 2001). Os dados sísmicos de refração podem ser úteis inclusive na modelagem geológica de velocidades em levantamentos marinhos (MITCHELL e BOLANDER, 1986).

Metodologias para a construção de modelos geológicos de velocidades sísmicas são fundamentais, pois as variações das propriedades físicas das rochas e a complexidade estrutural geram erros na predição das profundidades (FERNANDES, 2017). De modo a obter um modelo de velocidade robusto, deve-se utilizar todas informações disponíveis de velocidades (tomografia, migração, perfis de poços etc.) e as ponderando com informações geológicas, tratamentos estatísticos e ferramentas geoestatísticas (MAUL *et al.* 2005; BULHÕES *et al.*, 2018). Na maioria dos casos a parte rasa do poço não é perfilada devido a fatores operacionais (falta de estabilidade) e econômicas (BULHÕES *et al.*, 2018). A Figura 2 apresenta a seção sísmica de reflexão cruzada por três poços e seus respectivos perfis sônicos.

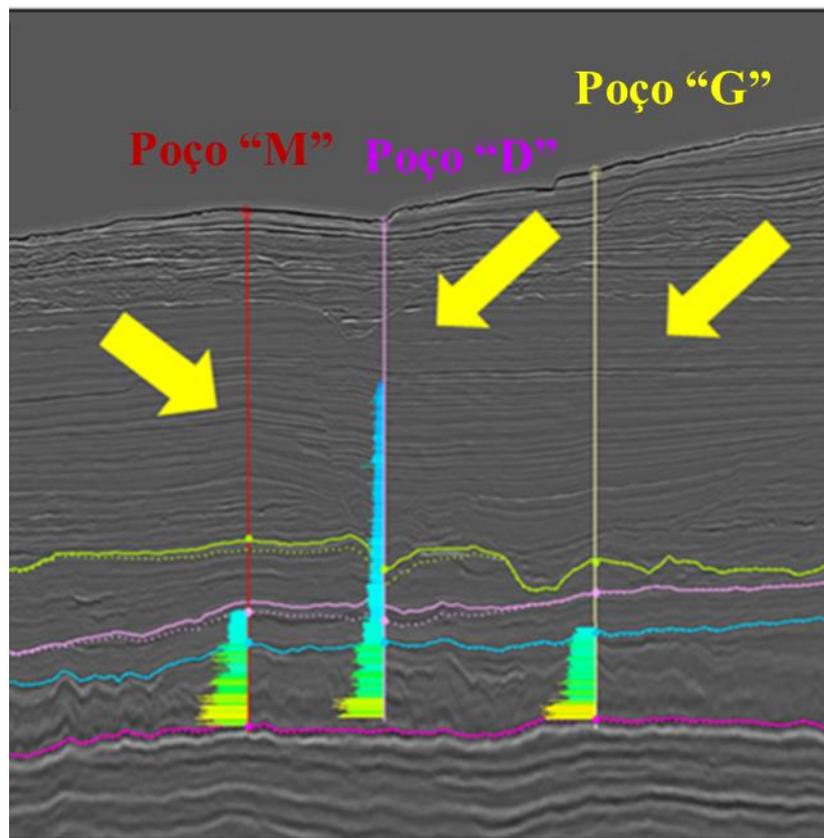


Figura 2: Seção sísmica que passa por três poços e seus respectivos perfis sônicos.

Fonte: Adaptado de Bulhões *et al.* (2018).

As áreas de interesse da indústria de petróleo e gás estão, em geral, a grandes profundidades, nas quais a tomografia de primeiras chegadas não alcança. Porém, os modelos de velocidade nas partes rasas têm impacto direto no imageamento e conseqüentemente na interpretação das estruturas mais profundas. A correção estática, que é utilizada no processamento de dados terrestres, depende do modelo de velocidade na parte rasa e é uma primeira fonte de incertezas e erros no produto final do processamento sísmico (LINES;

NEWRICK, 2004). No Quadro 1 é apresentado o comparativo entre as técnicas de sísmica de refração e reflexão.

Refração	Reflexão
Resolve as velocidades mais profundas da crosta e as camadas mais rasas.	Resolve detalhes finos de subsuperfície.
Resolução Vertical: 10-20% da profundidade	Resolução Vertical: 5-10% da profundidade
Resolução Lateral: \approx metade do intervalo entre os geofones.	Resolução Lateral: \approx metade do intervalo entre os geofones.
refração crítica requer grande gradiente de velocidade	requer uma mudança na velocidade ou densidade
<i>Offset</i> = 5-10x a profundidade de interesse.	<i>Offset</i> =1-2x a profundidade de interesse.
Processamento é relativamente simples.	Processamento pode requerer muito de CPU.
Custo relativo: x	Custo relativo: 3x – 5x

Quadro 1: Comparação entre os conceitos de refração e reflexão.

Fonte: Adaptado de Marshall (2014) e Cavacundo (2015).

A sísmica de refração tem maiores aplicações na parte rasa e em ultra profundidade, para estudo de crosta em conjunto com métodos potenciais, enquanto a sísmica de reflexão resolve os detalhes em profundidades intermediárias. A refração crítica requer um grande gradiente de aumento de velocidade com a profundidade, enquanto a reflexão identifica a variação de impedância (velocidade x densidade). No quesito de geometria de aquisição, para alcançar o objetivo em subsuperfície, a sísmica de refração requer *offset* fonte-receptor de cinco a dez vezes a profundidade do objetivo (MARSHALL, 2014). Por outro lado, a sísmica de reflexão requer *offsets* de uma a duas vezes da profundidade objetivo de investigação. No aspecto computacional, a sísmica de refração tem muito menor custo comparado à sísmica de reflexão.

Segundo Lankston (1989), o método de reflexão oferece algumas capacidades que o método de refração não pode ofertar, mas o inverso também é verdadeiro. De fato, a refração sob o ponto de vista físico, depende da heterogeneidade do meio para que a energia sísmica retorne em direção aos receptores, fornecendo informações de velocidade independentes da reflexão. Entretanto, os métodos de primeiras chegadas convencionais não conseguem mostrar a verdadeira força dessa técnica com geometria e mídia simplificadas demais, embora tentem desenvolver conceitos físicos exclusivos a partir dos tempos de trânsito da refração.

A Figura 3 apresenta o esquema de aquisição sísmica com par fonte-receptor e o traçado de raio representando a propagação das ondas sísmicas ao longo subsuperfície por um modelo de duas camadas plano-paralelas.

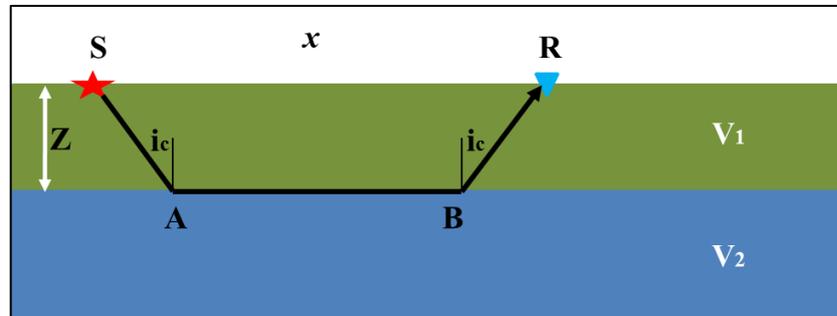


Figura 3: Posições sucessivas das frentes de ondas diretas e refratadas em um modelo de duas camadas.

Após a emissão da energia pela fonte, observa-se o deslocamento da onda a partir de raios perpendiculares ao deslocamento. Tem-se, então, o raio direto e o raio criticamente refratado. Parte da onda irá se propagar com velocidade, a velocidade do meio 1 (V_1) e a outra parte, ao incidir criticamente na interface entre as camadas 1 e 2, é refratada e viaja com a velocidade do meio 2 (V_2) até o instante no qual é registrada pelo receptor próximo à superfície. O raio correspondente à onda direta propaga-se no topo da camada superior da fonte (S) para o receptor (R) com velocidade V_1 e tem seu tempo de percurso dado por x/V_1 , onde x é a distância horizontal da fonte sísmica S até o receptor R. A equação pode ser apresentada em um gráfico tempo versus distância para um modelo de duas camadas, onde a curva será uma reta de inclinação $1/V_1$, passando pela origem conforme exibido na Figura 4.

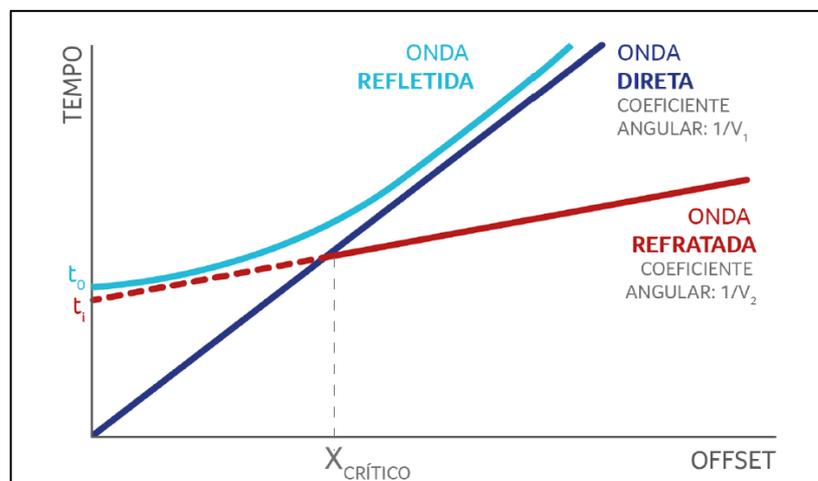


Figura 4: Curvas tempo versus distância para a onda direta e a onda refratada. Fonte: Carbonesi (2018).

O cálculo do tempo t que o raio criticamente refratado percorre a distância entre a fonte (S) e o receptor (R), passando pela interface entre as camadas 1 e 2 (t_{AB}) é dado pela Equação 01:

$$t = t_{SA} + t_{AB} + t_{BR} \quad \text{Eq. 1}$$

Onde:

t_{SA} e t_{BR} são os tempos de trânsito nos trechos descendente SA da fonte até a interface e ascendente BR da interface ao receptor, respectivamente.

Reescrevendo o tempo em função das distâncias percorridas e as velocidades das camadas V_1 e V_2 tem-se (Eq. 2):

$$t = \frac{SA}{V_1} + \frac{AB}{V_2} + \frac{BR}{V_1} \quad \text{Eq. 2}$$

As distâncias da fonte S ao ponto A do refrator (o mesmo do ponto B da interface ao receptor R) calculados em função da profundidade do refrator Z e do ângulo crítico i_c são dados pela Eq. 3. A distância deslocada entre os pontos A e B ao longo da interface das camadas 1 e 2 é descrita pela Eq. 4

$$SA = BR = \frac{Z}{\cos(i_c)} \quad \text{Eq. 3}$$

$$AB = x - 2Z \tan(i_c) \quad \text{Eq. 4}$$

Onde:

x é o afastamento entre fonte-receptor (SR).

Substituindo as Equações 3 e 4 na Equação 2 tem-se o tempo de trânsito (Eq. 5):

$$t = \frac{2Z}{V_1 \cos(i_c)} + \frac{x - 2Z \tan(i_c)}{V_2} \quad \text{Eq. 5}$$

Reescrevendo a Equação 5 tem-se:

$$t = \frac{x}{V_2} + \frac{2Z}{V_1 \cos(i_c)} \left[1 - \frac{V_1}{V_2} \sin(i_c) \right] \quad \text{Eq. 6}$$

Que pode ser simplificada pelas Equações 7 e 8.

$$t = \frac{x}{v_2} + \frac{2Z \cos(i_c)}{v_1} \quad \text{Eq. 7}$$

$$t = \frac{x}{v_2} + \frac{2Z \sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2} \quad \text{Eq. 8}$$

Onde:

t é o tempo total da onda percorrida da fonte ao receptor
 SA , AB e BR são as distâncias percorridas pela onda em cada trecho.
 t_{SA} , t_{AB} e t_{BR} os tempos percorridos da onda nos trechos AS , AB e BR , respectivamente.
 Z é a profundidade da interface refratora.
 i_c é o ângulo crítico de incidência

A Equação 08 define uma reta com $1/v_2$ como inclinação (coeficiente angular) e $t_0 = t(0) = \frac{2Z \cos(i_c)}{v_1}$ é o tempo de cruzamento com $offset = 0$. O cálculo da profundidade Z é dada pela Equação 9.

$$Z = \frac{t_0 v_1}{2 \cos(i_c)} \quad \text{Eq. 9}$$

Onde:

Z é a profundidade da interface refratora e, i_c o ângulo crítico do raio refratado.

Na Figura 5 a trajetória do raio é esquematizada, o que representa uma onda refratada num modelo de velocidade com três camadas. O tempo de trânsito calculado para este modelo é descrito nas Equações 10 a 13.

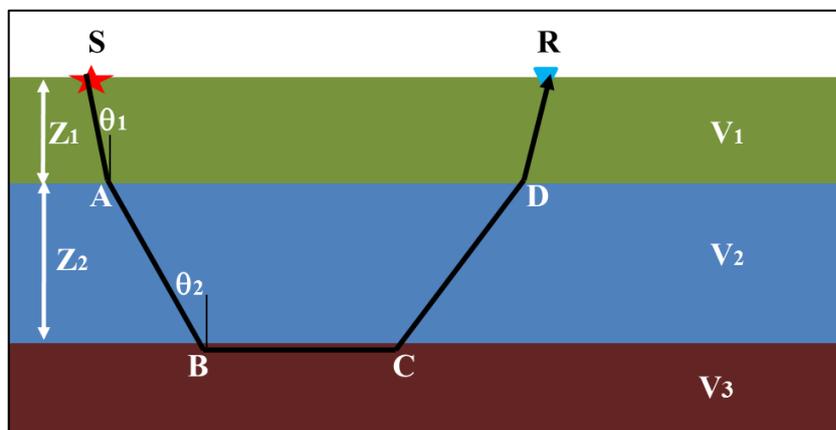


Figura 5: Trajetória de um raio para uma onda refratada em um modelo com três camadas.

A Figura 6 exibe a curva tempo versus distância para as ondas diretas e frontais no caso de dois refratores horizontais.

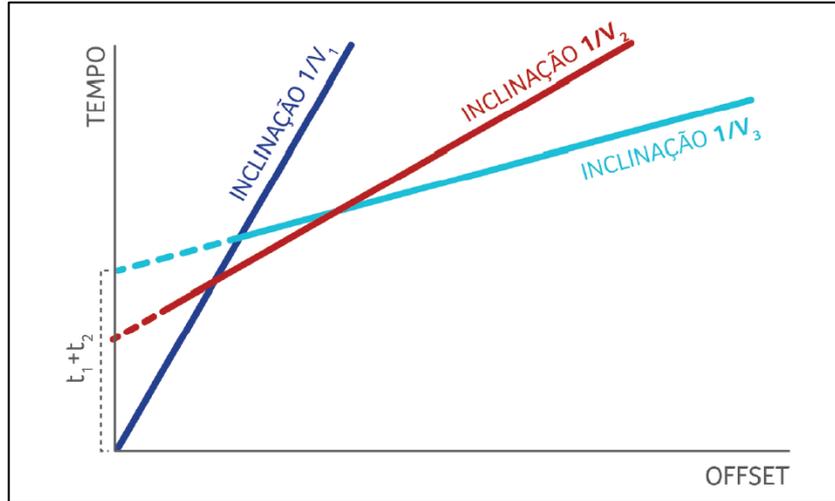


Figura 6: Curva tempo versus distância para as ondas direta e frontais de dois refratores horizontais.
Fonte: Carbonesi (2018).

O tempo de trânsito para onda refratada no caso de três camadas é dada pela Equação 10.

$$t = \frac{SA+DR}{V_1} + \frac{AB+CD}{V_2} + \frac{BC}{V_3} \quad \text{Eq. 10}$$

Reescrevendo em função das profundidades Z_1 e Z_2 das interfaces das camadas 1-2 e 2-3 e as velocidades de propagação V_1 , V_2 e V_3 respectivamente (Equação 11):

$$t = \frac{2Z_1}{V_1 \cos \theta_1} + \frac{2Z_2}{V_2 \cos \theta_2} + \frac{x - 2Z_1 \tan \theta_1 - 2Z_2 \tan \theta_2}{V_3} \quad \text{Eq. 11}$$

Colocando a Equação 11 em função do afastamento entre fonte-receptor (x) tem-se (Eq. 12):

$$t = \frac{x}{V_3} + \frac{2Z_2}{V_2 \cos \theta_2} \left[1 - \frac{V_2}{V_3} \sin \theta_2 \right] + \frac{2Z_1}{V_1 \cos \theta_1} \left[1 - \frac{V_1}{V_3} \sin \theta_1 \right] \quad \text{Eq. 12}$$

Simplificando a Equação 12 obtém-se (Eq. 13):

$$t = \frac{x}{V_3} + \frac{2Z_2 \cos \theta_2}{V_2} + \frac{2Z_1 \cos \theta_1}{V_1} \quad \text{Eq. 13}$$

Onde:

t é o tempo total da onda percorrida da fonte ao receptor
 SA, DR, AB, CD e BR são as distâncias percorridas pela onda em cada trecho.
 θ_1 e θ_2 são os ângulos de incidência da camada 1 para 2 e da camada 2 para 3, respectivamente.
 Z_1 e Z_2 são as profundidades das interfaces refratoras

A generalização para o cálculo dos tempos de trânsito de n camadas plano, paralelas e horizontais é dado pela Equação 14.

$$t = \frac{x}{V_n} + \sum_i \frac{2Z_i \cos \theta_i}{V_i} \quad \text{Eq. 14}$$

A natureza não apresenta esse caráter de camadas plano, paralelas e horizontais. A presença de camadas mergulhantes, dobras e falhas são aspectos complicadores para interpretação e identificação utilizando método sísmico de refração conforme mostrado na Figura 7.

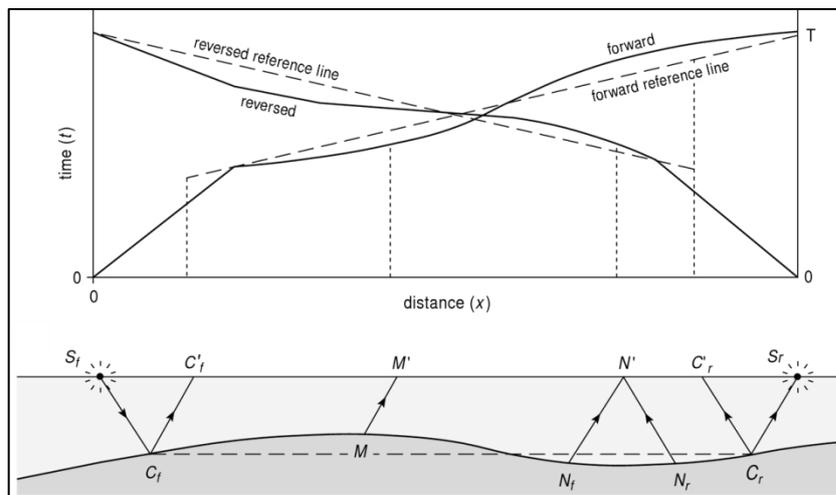


Figura 7: Curva t-x para refrator com sinclinais e anticlinais.
 Fonte: Sigloch (2015).

2.2 PROBLEMA DIRETO E INVERSO

De acordo com Menke (1989), problema inverso pode ser definido como um grupo de técnicas matemáticas que extraem os parâmetros físicos dos correspondentes dados observados e correlacionar um modelo físico-matemático que os justifique. Um problema é dito inverso quando se deseja estimar propriedades físicas do meio a partir de dados registrados que são externos ao mesmo. Um modo mais abrangente para definir-se o que é problema inverso é

considerar o modo de obtenção do modelo físico (conjunto de propriedades e parâmetros) a partir de dados observados e que sejam correspondentes as observações, como ocorre na interpretação geofísica e geológica por exemplo.

Pela teoria da inversão, define-se a partir da Equação 15:

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m} \quad \text{Eq. 15}$$

Onde:

\mathbf{d} é o vetor de dado correspondente à uma observação;
 \mathbf{m} é o parâmetro do modelo;
 \mathbf{G} é a matriz que relaciona os parâmetros \mathbf{d} e \mathbf{m} .

Na Figura 8 é representado de forma esquemática o que são problemas direto e inverso. O problema inverso é: tendo-se \mathbf{d} e \mathbf{G} , obter \mathbf{m} enquanto que problema direto é obter \mathbf{d} a partir de \mathbf{m} e \mathbf{G} .

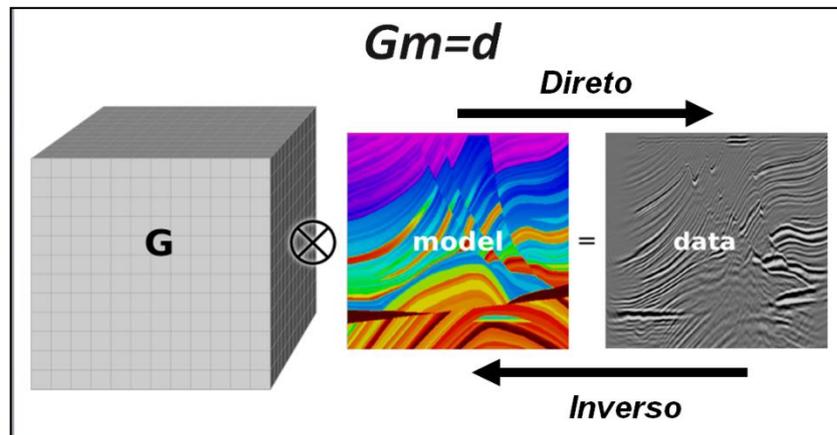


Figura 8: Esquema com representação de problemas direto e inverso.
 Fonte: Bianco (2013).

Reescrevendo a Equação 16 na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{K1} & g_{K2} & \cdots & g_{KN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_K \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 16}$$

Onde:

vetor \mathbf{d} com os dados calculados que correspondem aos tempos de trânsito; vetor \mathbf{m} com a propriedade física (os parâmetros m_i) representando o modelo de velocidade; e a matriz tomográfica \mathbf{G} (ou matriz de sensibilidade) que os relaciona.

Na análise do problema direto, podem-se observar os efeitos que variações na matriz tomográfica (construída por meio do traçado de raios ou alteração no modelo de velocidade) provocam nos tempos de trânsito. Os dados calculados na modelagem direta são utilizados na identificação dos parâmetros do modelo que descrevem os dados observados.

2.3 PROBLEMA MAL-POSTO

Hadamard (1902) definiu que um problema inverso é dito mal-posto quando a solução não atende ao menos uma das seguintes condições: existência, unicidade e estabilidade. Em um problema bem-posto, as três condições mencionadas devem ser satisfeitas.

Conforme Zhdanov (2002), as informações que se tem a respeito do modelo físico (\mathbf{m}) que gera \mathbf{d} , de acordo com a Equação 15, estão contida na matriz \mathbf{G} . Entretanto, sempre existem erros contidos no dado medido, seja na medição, ruídos inerentes ao sistema ou associados ao problema físico. Devido a estes fatores, nem sempre é possível obter o modelo \mathbf{m} que descreve os dados registrados \mathbf{d} , pois estes erros não são considerados na modelagem. Segundo Aster *et al.* (2005), existe a possibilidade do modelo adotado para descrever os dados não estar correto (ou completo), o que também impossibilita a obtenção de uma solução para tal problema.

Matematicamente existe a possibilidade que mais de um vetor \mathbf{m} satisfaça a Equação 15. Um modo fácil de compreender isso é adotar o conceito de espaço vetorial nulo de matrizes (ASTER *et al.*, 2005). O espaço nulo para a matriz \mathbf{G} , que é todo vetor não nulo \mathbf{m}_0 que satisfaz a Equação 17:

$$\mathbf{G}\mathbf{m}_0 = \mathbf{0} \quad \text{Eq. 17}$$

Seja \mathbf{m}_s uma solução que satisfaça o problema inverso modelado utilizando \mathbf{G} . A partir da definição de espaço nulo, as combinações lineares de \mathbf{m}_s e \mathbf{m}_0 também satisfazem a condição de solução do problema inverso. Portanto, sendo \mathbf{G} o espaço nulo não-vazio, então o problema inverso possui mais de uma solução possível.

De acordo com Zhdanov (2002), uma solução é dita estável se, para pequenas variações nos valores de \mathbf{d} levam a pequenas mudanças na solução. Caso isso não ocorra, tem-se uma solução instável. Definindo de forma mais rigorosa, operador \mathbf{G}^{-1} (inverso de \mathbf{G}) é dito contínuo quando apresenta estabilidade para todo espaço de soluções (MUNIZ, 1999).

Ainda para Zhdanov (2002), na tentativa de solucionar um problema inverso qualquer, por causa das limitações impostas aos dados observados, acaba na verdade procurando-se uma quase-solução que é a solução \mathbf{m}_s a qual satisfaz a condição (Equação 18):

$$\mathbf{G}\mathbf{m}_s = \mathbf{d}^{obs} \quad \text{Eq. 18}$$

Onde:

$\mathbf{G}\mathbf{m}_s$ é o dado calculado com o resultado da inversão;

A unicidade da solução para problemas inversos é essencial para que o problema seja classificado como bem-posto. Os problemas inversos de modo geral são mal-postos e para solucioná-los é necessário torná-los bem-postos utilizando-se de informações *a priori*, regularizações ou outros recursos que limitem as soluções possíveis.

Os cinco principais fatores identificados por Ivanov *et al.* (2005a) que são causadores da não-unicidade e como ocorrem no caso da tomografia de refração:

- Dados insuficientes para resolver o problema que na tomografia de primeiras chegadas seriam as células do modelo não cobertas pelos raios.
- Característica intrínseca do problema. Na tomografia de refração, quando existem as ditas camadas cegas onde velocidade mais baixa ocorre na camada mais profunda, os raios não atravessam essas regiões devido às características do meio.
- Erros nos dados.
- A distribuição estatística dos dados não ser gaussiana. Em outras palavras, o valor medido pode não ser representativo do modelo que está se utilizando para realização da inversão.
- Erro e instabilidade numérica.

Desse modo, fica em evidência os desafios existentes para a execução da tomografia de refração. A questão da não-unicidade da tomografia de primeiras chegadas também explica o porquê do método poder resultar em soluções não satisfatórias ou não obter resultados

(IVANOV *et al.*, 2005b). Caso não sejam usadas as informações *a priori* necessárias o problema não terá solução satisfatória.

2.4 TOMOGRAFIA

A inversão sísmica é um procedimento para reconstruir modelos de velocidade compressional em subsuperfície a partir de dados sísmicos (SANCEVERO *et al.*, 2006). A tomografia sísmica é um problema inverso que tem como objetivo obter modelo de velocidade com elevada acurácia. Nos últimos anos, essa técnica vem sendo utilizada para obtenção de modelo de velocidade útil para o imageamento sísmico em profundidade (WOODWARD *et al.*, 2008). Existem várias técnicas para estimativa dos campos de velocidade: tomografia de tempo de trânsito de reflexão; tomografia de tempo de trânsito de refração e; tomografia poço-a-poço; análise de velocidade de migração (MVA - *Migration Velocity Analysis*) e *Full Waveform Inversion* (FWI - inversão da forma completa da onda). O FWI é o estado da arte atualmente na técnica de estimativa do campo de velocidade sísmica (ALMEIDA, 2013).

Este trabalho trata de tomografia de ondas refratadas por tempo de trânsito. Nesta técnica os tempos de primeira chegada do levantamento sísmico são utilizados, com fontes e receptores na superfície, como dados observados.

A tomografia sísmica de refração tem como principal utilidade à obtenção de modelos de velocidade para eventos rasos em subsuperfície.

O traçamento dos raios ao longo das trajetórias das ondas sísmicas é um dos grandes desafios para a tomografia, pois caso não seja feito corretamente, a tomografia não alcançará bons resultados (ALMEIDA, 2013).

A presença de grandes contrastes de velocidade é uma limitação da tomografia de refração. Adotou-se neste trabalho o método proposto por Podvin e Lecomte (1991), que possibilita tratar os grandes contrastes de velocidade sem causar perdas no resultado do traçamento dos raios.

A reconstrução do modelo de velocidade pelos tempos de trânsito entre fonte e receptor está esquematicamente representada na Figura 9. O modelo é representado por células e o valor de velocidade V_j será atualizado em cada iteração tomográfica até minimizar a diferença entre o tempo observado e o calculado (Equação 19).

$$t_i = \sum_j l_{ij} \frac{1}{V_j} \quad \text{Eq. 19}$$

Onde:

l_{ij} é o comprimento do segmento de raio que atravessa a célula com velocidade V_j ;

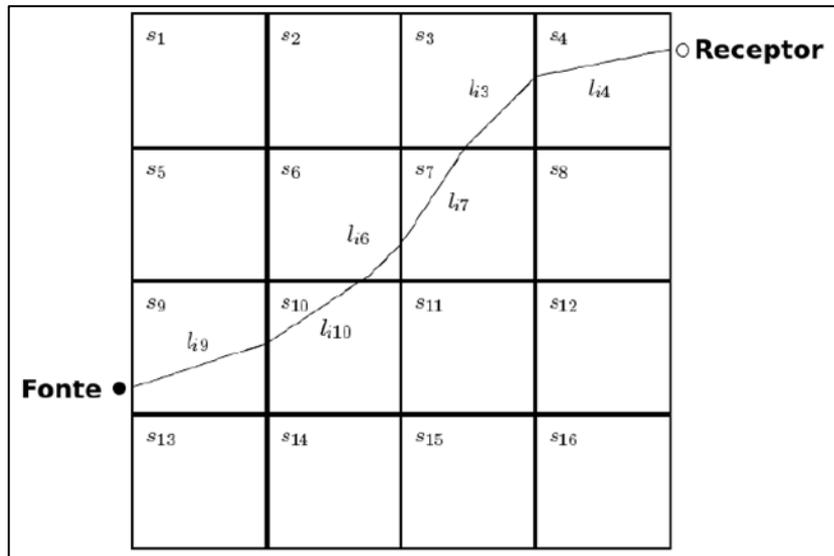


Figura 9: Ilustração demonstrando um raio percorrendo um modelo 2-D de células de vagarosidades homogêneas.
Fonte: Modificado de Berryman (1991).

O método dos mínimos quadrados é uma técnica de otimização aplicada durante a inversão do dado. Segundo Claerbout e Muir (1973), este tipo de ferramenta para ajuste de curvas é relativamente sensível a ruídos com amplitudes muito acentuadas. No caso do problema não linear, a norma L2 é muito utilizada e seu objetivo é minimizar certa função, fazendo com que o resíduo, que é a diferença entre o dado calculado e o dado observado, seja o menor possível e aceitável para determinado problema. Quanto menor for o resíduo do dado não implica necessariamente que o erro RMS do modelo seja menor, especialmente se o problema for mal-posto. Em outras palavras, o melhor ajuste entre os tempos teóricos e os observados é aquele no qual o RMS é menor. Assim, no contexto de mínimos quadrados (norma L2), a função objetivo a ser minimizada é a do quadrado do resíduo, dada pela Equação 20.

$$\varphi(\mathbf{m}) = \|\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{G}(\mathbf{m})\|_2 \quad \text{Eq. 20}$$

Onde:

\mathbf{d} é o dado observado; $\mathbf{G}(\mathbf{m})$ é o dado calculado.

Esta equação significa que buscar minimizá-la é buscar a solução que tenha o menor resíduo possível em relação ao dado observado e conseqüentemente, obter os parâmetros que melhor se ajustam às observações. Desmembrando a Equação 20, a função objetivo fica reescrita como na Equação 21:

$$\varphi(\mathbf{m}) = (\mathbf{d} - \mathbf{mG})^T(\mathbf{d} - \mathbf{mG}) \quad \text{Eq. 21}$$

Que equivale a Equação 22:

$$\varphi(\mathbf{m}) = \mathbf{d}^T \mathbf{d} - \mathbf{m}^T \mathbf{G}^T \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{mG} + \mathbf{m}^T \mathbf{G}^T \mathbf{Gm} \quad \text{Eq. 22}$$

Para minimizar a função objetivo, devem-se encontrar os pontos nos quais sua derivada seja zero. Assim, derivando a Equação 22 e igualando a zero, obtêm-se:

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} = \mathbf{0} - \mathbf{G}^T \mathbf{d} - \mathbf{G}^T \mathbf{d} + 2\mathbf{G}^T \mathbf{Gm} = 0 \quad \text{Eq. 23}$$

Isolando m obtém-se (Equação 24):

$$\mathbf{m} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d} \quad \text{Eq. 24}$$

Substituindo m por $\Delta \mathbf{m}$ tem-se:

$$\Delta \mathbf{m} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \Delta \mathbf{d} \quad \text{Eq. 25}$$

A Equação 25, $\Delta \mathbf{m}$ é o termo de atualização do modelo de velocidade. O termo depende da inversa da matriz $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$.

$$\mathbf{m}_{i+1} = \mathbf{m}_i + \Delta \mathbf{m} \quad \text{Eq. 26}$$

E o processo tomográfico transcorrerá até ou executar o número de iterações pré-definidas ou quando resíduo for menor que o valor estipulado (Equação 27).

$$\|\mathbf{d} - \mathbf{Gm}_s\|_2 < \delta \quad \text{Eq. 27}$$

Onde:

$\|d - Gm_s\|_2$ é a norma L2 do erro entre o dado observado e o dado calculado; e δ é o valor da tolerância escolhido para a norma do erro entre o dado observado e o dado calculado.

O fluxo geral da inversão tomográfica é representado na Figura 10 e contém como etapas: os dados registrados; a definição de um modelo inicial para a modelagem direta; definição do número de iterações n e da tolerância para o resíduo δ ; o cálculo do resíduo (diferença entre o dado calculado e o registrado); se o resíduo for menor que a tolerância o fluxo termina, caso contrário o modelo de entrada é atualizado pelo parâmetro Δm até que ou o resíduo seja menor que a tolerância ou o número de iterações pré-definidos seja realizado.

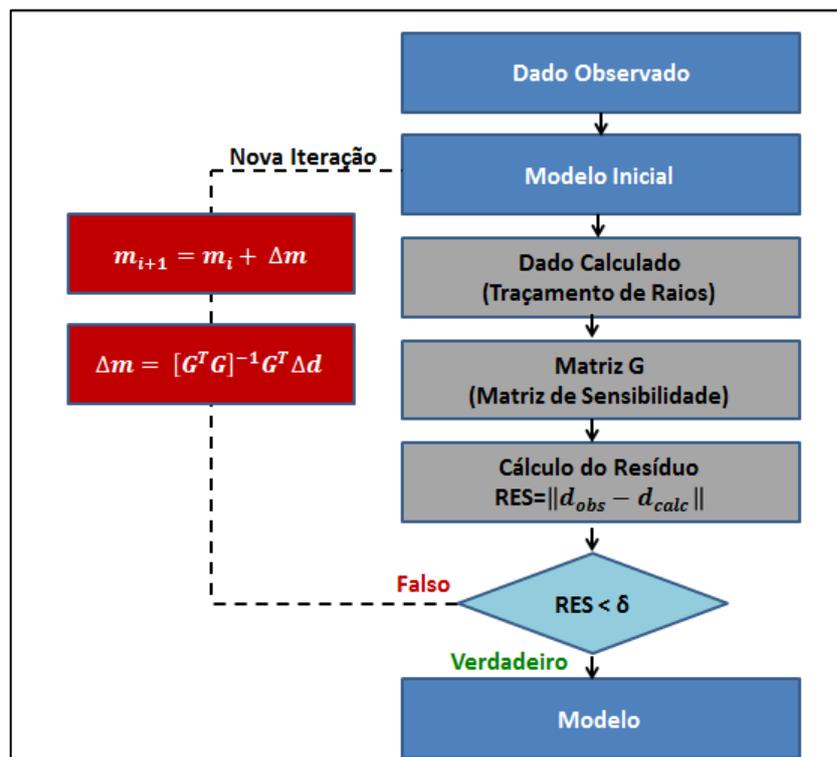


Figura 10: Fluxo geral de tomografia sísmica.
Fonte: Adaptado de Carbonesi (2018).

2.4.1 Modelagem sintética

Utilizando um modelo sintético, pode-se analisar o erro, ou seja, a diferença do modelo real conhecido e o calculado pela inversão tomográfica. Erro esse que representa o quão diferente é o modelo final do modelo sintético, que simula a subsuperfície. Cutler *et al.* (1984) indica que o processo deve chegar idealmente a uma solução entre três e cinco iterações.

O fluxo para modelagem e inversão tomográfica está representado na Figura 11. Em primeiro lugar, realiza-se a modelagem sintética, definindo um modelo de velocidade compressional. Em seguida, define-se a discretização do modelo para executar o cálculo da matriz de sensibilidade. A partir da matriz de sensibilidade, os tempos de trânsito são calculados e que serão os dados de entrada. Os dados calculados são considerados dados observados, pois simulam uma situação de aquisição real de campo.

A denominação dados calculados é aplicada para os dados calculados na etapa de inversão. O processo de inversão não-linear demanda um modelo inicial e após as etapas da tomografia, geram-se os dados calculados a cada iteração. A inversão tem como objetivo minimizar o resíduo (diferença entre dado calculado e dado observado). Se o valor do resíduo for menor que o limiar definido para a modelagem, o processo de inversão é encerrado. Caso contrário, se o resíduo for acima de um valor de tolerância definido previamente, atualiza-se o modelo e tem início nova iteração.

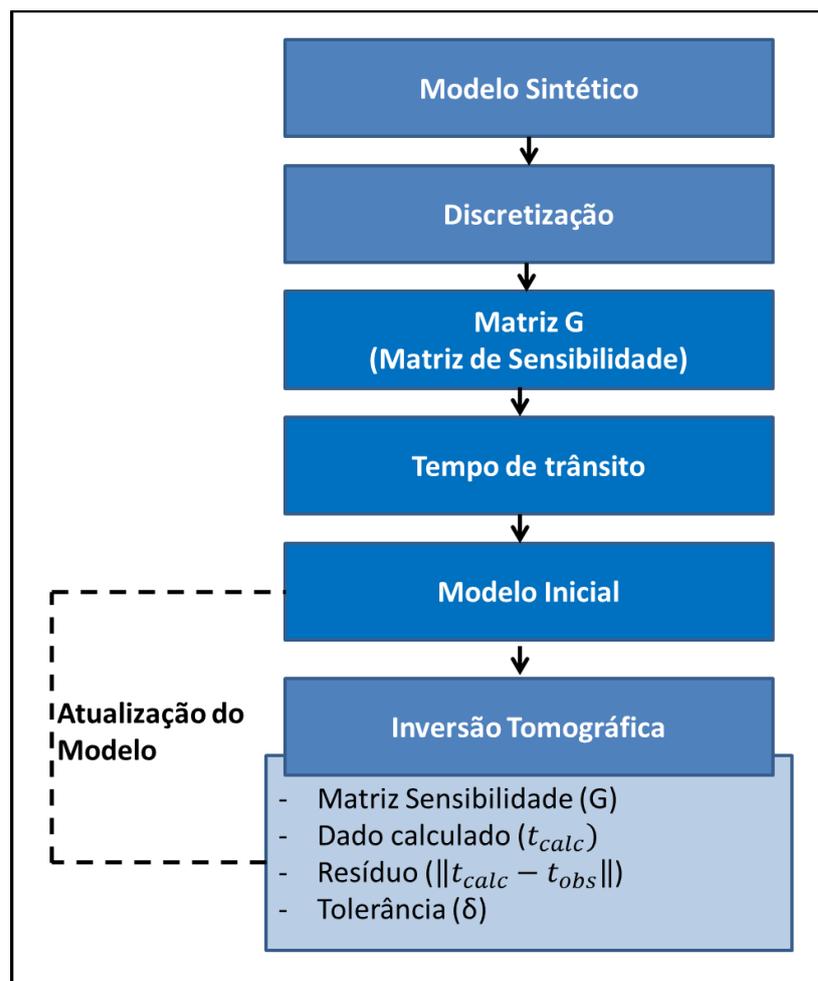


Figura 11: Fluxo para inversão tomográfica utilizando modelo sintético.
Fonte: Modificado de Carbonesi (2018).

2.5 TOMOGRAFIA DE REFRAÇÃO

A ocorrência do efeito de refração de ondas sísmicas não se dá sempre de modo idealizado nas demonstrações realizadas pelo fato de que a geologia em subsuperfície é mais complexa do que é exemplificada. De uma maneira geral não se espera que a refração seja como as *head waves*, mas sim como ondas mergulhantes (*diving waves*), porque em bacias sedimentares é mais comum que haja um gradiente suave do aumento da velocidade em função da profundidade.

Por isso, no tratamento da tomografia sísmica de refração deve-se levar em consideração que existem as *head waves* e as *diving waves* e as combinações destas (OSYPOV, 1999). Um modo mais genérico para definir a tomografia de refração é considerá-la como sendo a tomografia por tempo das primeiras chegadas quando fontes e receptores estão na superfície. Ou seja, a geometria da aquisição é que determina a definição.

Na literatura diferentes nomes são adotados para a tomografia de refração, entre as quais estão: tomografia por tempo de primeira chegada (TAILLANDIER *et al.*, 2011); tomografia por raios de retorno (STEFANI, 1995); tomografia por ondas refratadas mergulhantes (TANIS *et al.*, 2006) além de tomografia de refração (WHITE, 1989; OSYPOV, 1999). Neste trabalho será adotada a nomenclatura de tomografia de refração.

Hampson e Russel (1984) realizaram um dos primeiros trabalhos de tomografia de refração. Nos trabalhos de AMORIM *et al.* (1987) e White (1989) a tomografia de refração é utilizada para correção estática.

Os dados de refração sísmica são convencionalmente adquiridos com disparos "para frente" e "reverso", e sua interpretação é feita usando a reciprocidade de várias maneiras. Estes incluem o método recíproco generalizado (PALMER, 1980), o método de reconstrução de frente de onda (ALDRIGE e OLDENBURG, 1992) e o método de extrapolação de campos de ondas (CLAYTON e MCMECHAN, 1981; HILL, 1987). Todos esses métodos partem da premissa de que as estruturas geológicas são simples e tentam principalmente identificar um refrator, ou seja, contraste de velocidade (Figura 12). Métodos de tomografia, onde são usadas abordagens para calcular tempos de trânsito e caminhos de raio em um modelo de grade regular e técnicas de inversão para reconstruir velocidades sísmicas.

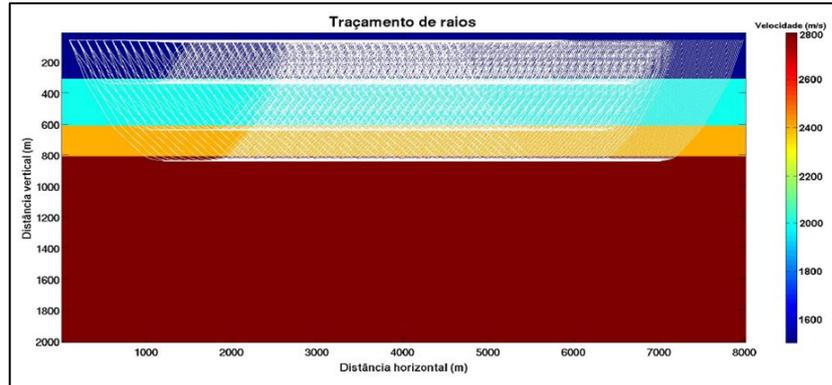


Figura 12: Seção de velocidade plano paralelo horizontal com os raios refratados nas interfaces das camadas.

Fonte: Almeida (2013).

A tomografia de refração tem fluxo geral como o apresentado na Figura 13. As etapas são: ler as primeiras quebras (ou chegadas), selecionar o método de análise, marcar as camadas, selecionar as elevações (topografias, se aplicáveis), aplicar o processo de inversão com um modelo inicial e comparar o dado calculado com o observado. A atualização do modelo ocorre até a minimização do dado calculado e dado de entrada segundo o valor definido. Na Figura 14 é representado, de modo ilustrativo, o painel do *software* Zond (KAMINSKY, 2019) onde são apresentados os tempos de trânsito das primeiras chegadas observados e calculados, e o modelo de velocidade da tomografia.

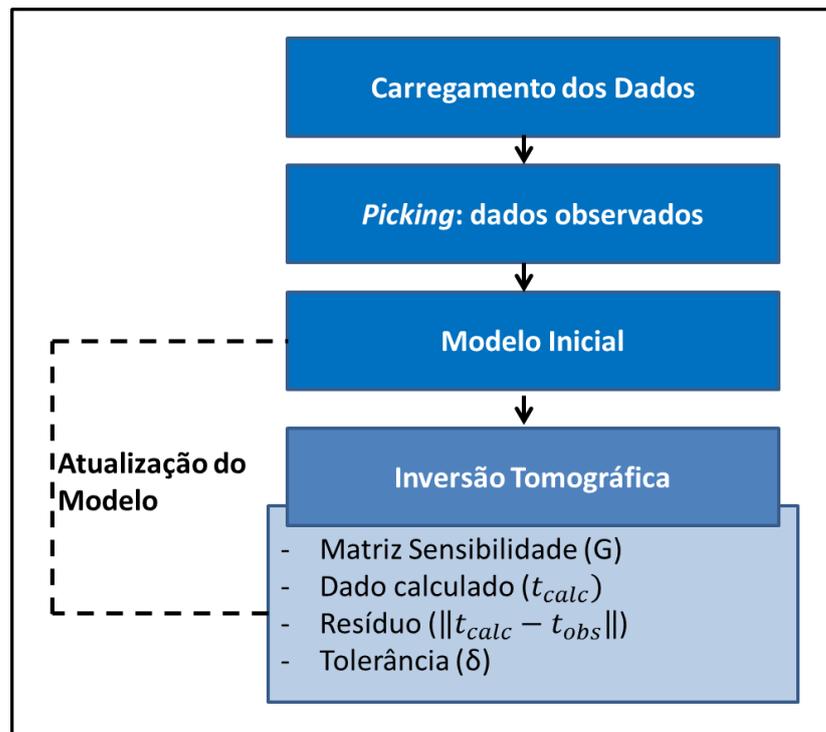


Figura 13: Fluxo geral da tomografia sísmica de refração.

Fonte: Adaptado de Carbonesi (2018).

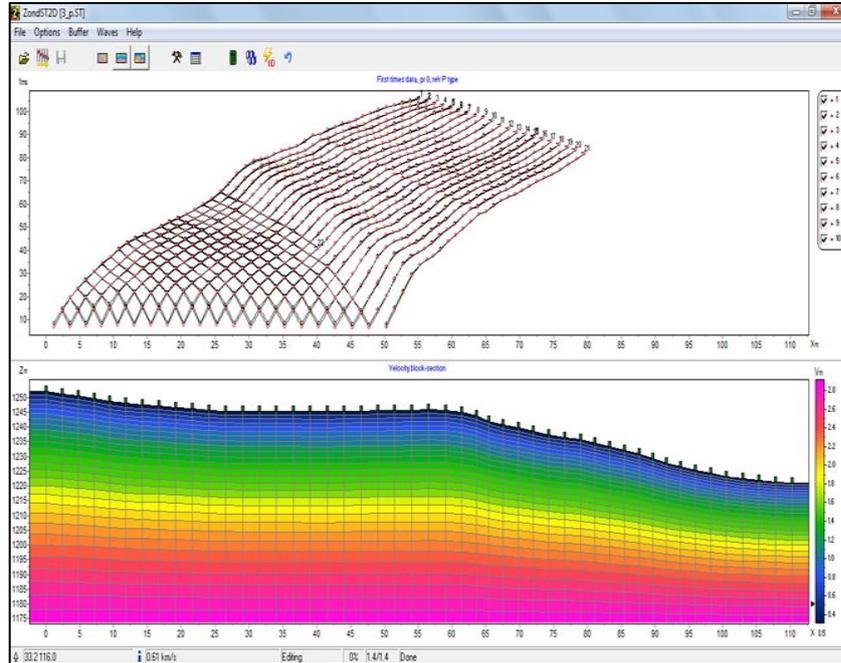


Figura 14: Janela do *software* Zont2D com as linhas de tempo originais e as corrigidas pela tomografia de refração e abaixo seção da velocidade.
Fonte: Kaminsky (2019).

Zelt *et al.* (2013) realizaram estudos comparativos entre *softwares* de tomografia de refração conforme apresentado na Figura 15.

Model	Algorithm	Reference	T_{RMS} (ms)	Difference		Relative difference	
				Mean ¹ (m/s)	Std. dev. (m/s)	Mean ¹ (%)	Std. dev. (%)
1	GeoTomo	Zhang and Toksoz (1998)	1.3	-237	564	-9.3	24.0
2	Rayfract	rayfract.com	1.08	-208	466	-3.2	23.4
3	Rayfract	rayfract.com	1.17	-174	491	-2.7	23.3
4	Rayfract	rayfract.com	1.18	-172	506	-2.7	23.6
5	Rayfract	rayfract.com	1.18	-189	470	-2.5	23.6
6	Rayfract	rayfract.com	1.17	-185	517	-2.4	24.9
7	Geometrics SeisImager/2-D	geometrics.com ²	1.11	-223	479	-3.0	24.8
8	Geometrics SeisImager/2-D	geometrics.com ²	1.40	-16	524	+7.1	37.9
9	Geogiga DW Tomo	geogiga.com ³	1.72	-166	522	-1.5	26.4
10	Geogiga DW Tomo	geogiga.com ³	1.13	-111	469	-0.6	22.1
11	DLT (Deformable layer tomography)	Zhou (2006)	1.05	-141	449	-1.2	24.6
12	Phase Inversion	Ellefsen (2009)	1.2	-152	439	-1.3	22.2
13	WARRP	Ditmar <i>et al.</i> (2009)	1.32	-173	571	-1.4	26.3
14	Tomog	Preston <i>et al.</i> (2007)	1.59	-93	675	+0.4	27.7

¹ $Estimated - True$
² <http://www.geometrics.com/geometrics-products/seisimographs/download-seisimograph-software>
³ <http://geogiga.com/en/dwtomo.php>

Figura 15: Quadro comparativo entre os *softwares* de tomografia de refração.
Fonte: Zelt *et al.* (2013).

2.5.1 Programa de modelagem sísmica de refração TOMO_GISIS

Neste trabalho o *software* de tomografia de refração descrito nos trabalhos de Capucci (2013) e Almeida (2013) e fluxo apresentado na Figura 10. A tomografia implementada utiliza algoritmo de traçamento de raios com linearização do problema inverso para resolução iterativa do sistema. Utilizou-se o programa TOMO_GISIS em linguagem Fortran criado pelo Grupo de Imageamento Sísmico e Inversão da Universidade Federal Fluminense (ALMEIDA, 2013). Esse código foi adaptado da dissertação de mestrado realizado por Capucci (2013) no GISIS, código esse para tomografia poço a poço utilizando a regularização de Berryman e escrito em Matlab. Desse modo, deu-se prosseguimento aos estudos supracitados adaptando e aprimorando o código para a seção de regularização para o caso de Berryman, conforme objetivos propostos no presente estudo.

O programa de tomografia é baseado na técnica traçamento de raios desenvolvida por Podvin e Lecomte (1991). A obtenção da matriz de tempo de trânsito utiliza diferenças finitas por meio da equação eikonal para o cálculo das primeiras chegadas e matriz tomográfica com aplicação de regularização.

O programa é dividido em 8 partes:

- 1) Programa principal `calculo_tempo_transito_raios` que chama as demais rotinas.
- 2) Geometria que define a geometria de aquisição: esta subrotina calcula as coordenadas dos tiros e dos receptores a partir dos parâmetros de aquisição fornecidos.
- 3) Eikonal: subrotina que calcula o tempo de trânsito pela solução da equação eikonal utilizando diferenças finitas (PODVIN e LECOMTE, 1991). Utiliza-se um *grid* com células quadradas.
- 4) Gradiente: Implementação do cálculo do gradiente por diferenças finitas de primeira ordem nas direções vertical e horizontal, dado um *grid* (matriz). Este módulo contém duas sub-rotinas: uma para cálculo do gradiente no esquema central de diferenças finitas e outro no esquema progressivo.
- 5) `Matriz_tomo_raytracing`: esta rotina calcula as trajetórias dos raios associadas a cada par fonte-receptor e a matriz tomográfica (ou matriz sensibilidade) associada ao conjunto de receptores e fontes considerados. A matriz tomográfica obtida é esparsa, e essa característica a leva a ser obtida diretamente no esquema de índices completos. Para a obtenção dos dois

resultados é necessário o gradiente do tempo de trânsito (componente horizontal e vertical) no modelo de velocidade utilizado e as posições das fontes e receptores.

6) Média_móvel: filtro de média móvel em duas dimensões, usado como tratamento para o modelo de velocidade resultantes da inversão tomográfica. Nesta rotina a janela de suavização deve ser definida.

7) Regularização: esta subrotina concatena à matriz tomográfica a matriz regularizante (Tikhonov e Berryman) e acrescenta zeros ao vetor de dados, de forma que o método de otimização (conjugado gradiente) resolva a equação normal do problema considerando a regularização.

8) Gradiente_Conjugado: utiliza o gradiente conjugado linear.

Um fator que apresenta limitações na tomografia de refração é o comprimento dos raios refratados. Conforme o aumento do comprimento do raio, este atravessa mais células do modelo e, conseqüentemente mais parâmetros de cada raio se relaciona com o mesmo tempo de chegada registrado. A ambigüidade cresce com o aumento do comprimento dos raios e o mesmo ocorre entre o comprimento e o afastamento fonte-receptor (STEFANI, 1995). De acordo com o autor, a tomografia de refração, diferentemente da tomografia de reflexão, não apresenta ambigüidade entre velocidade da interface e a profundidade do refletor. Por este motivo estas técnicas são ditas complementares. A tomografia de refração tem a vantagem na facilidade de identificar esses eventos nas seções de tiro quando comparados a identificação de outros eventos.

O tratamento dos eventos de primeiras chegadas ao geofone se torna factível à aplicação de um processo automático. Entre os trabalhos de automatização se destacam o de Mousa *et al.* (2011). Diante do grande volume de dados na indústria de óleo e gás, essa técnica pode se apresentar útil.

Para avaliar do quanto o programa de tomografia de refração consegue recuperar dos modelos de velocidade reais, realizaram-se testes para três modelos de velocidade:

- a) Modelo de canal baseado no trabalho de Zhang & Toksöz (1998), mostrado na Figura 16
- b) Modelo homogêneo de velocidade 2000 m/s com uma anomalia de baixa de 1500 m/s (Figura 17) e
- c) Adoção do modelo caso (b) acrescentando uma camada com velocidade 2500 m/s abaixo da anomalia de baixa velocidade (Figura 18).

Os três modelos apresentam as mesmas dimensões (2.500 m na direção horizontal e 250 m na profundidade) com células de 10 m.

No caso (a) do canal raso ocorreu uma recuperação das principais feições estruturais. Este modelo será utilizado para avaliação dos parâmetros de regularização.

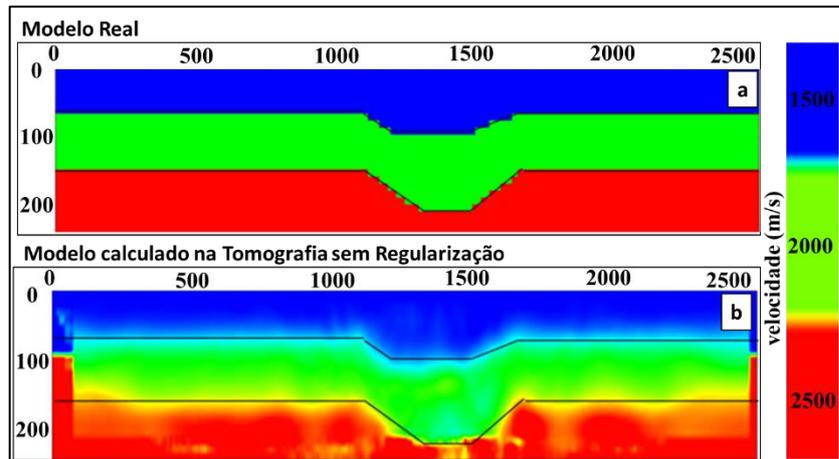


Figura 16: Modelo de canal raso real e o resultado pela tomografia de refração.

O caso (b) utilizando o modelo homogêneo com uma anomalia de baixa velocidade, referente à anomalia de baixa velocidade na camada raso recuperou apenas a parte superior da anomalia, mas não conseguindo resolver a parte inferior. Isso se deve ao fato de não existir uma camada abaixo dessa anomalia e que funcionaria como fonte secundária para aumentar a quantidade de raios refratados retornando aos receptores.

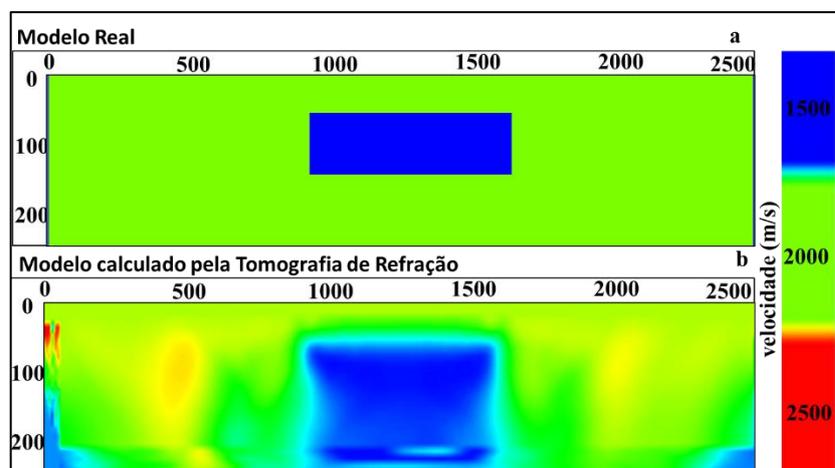


Figura 17: Modelo de velocidade com uma camada e anomalia de velocidade. (a) modelo real e (b) resultado da tomografia.

No caso (c) ao adicionar-se a camada inferior, os limites superior e inferior da anomalia ficam definidos, além da camada inferior.

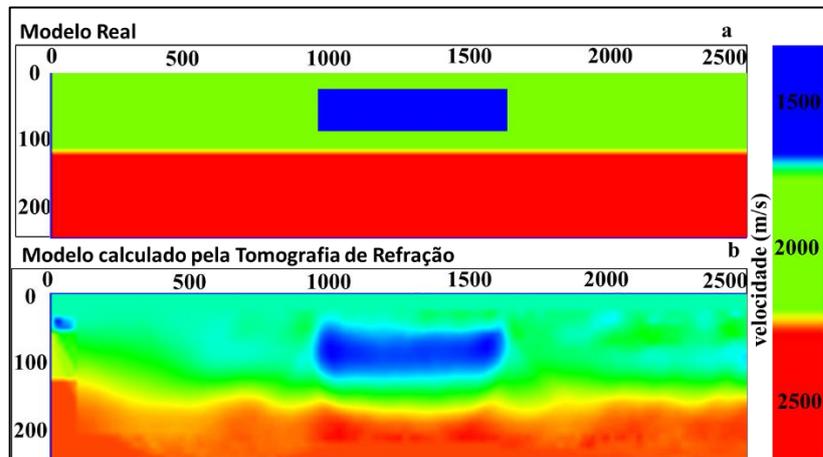


Figura 18: Modelo de velocidade com duas camadas e anomalia (a) modelo real (b) modelo obtido pela tomografia.

Os resultados obtidos para os três casos demonstram a robustez do programa TOMO_GISIS, pois a identificação de anomalias de baixa velocidade e inversão de velocidades são aspectos desafiadores da tomografia de primeiras chegadas.

2.6 REGULARIZAÇÃO

Uma abordagem comum para estabilizar o problema inverso mal-posto é aplicar a regularização, que na prática corresponde a restringir as possíveis soluções para a inversão. A regularização também pode ser vista como a introdução de informação *a priori* nos dados que são invertidos, dado que este procedimento restringe as soluções possíveis do problema a um subconjunto de todas as soluções que a princípio seriam possíveis. A sua aplicação é amplamente utilizada em diversas áreas. Conforme pesquisa realizada na base Scopus (2020) utilizando a palavra “*regularization*” até o ano de 2019, 61.465 trabalhos foram publicados, onde 90% dessas publicações concentram-se nas áreas de Ciência da Computação, Inteligência Artificial, Problemas Mal-Postos e Inversos, Matemática Pura e Aplicada, Ciências da Terra, Física, Astronomia, Ciência dos Materiais e Medicina, conforme Gráfico 3 com as áreas dos periódicos.

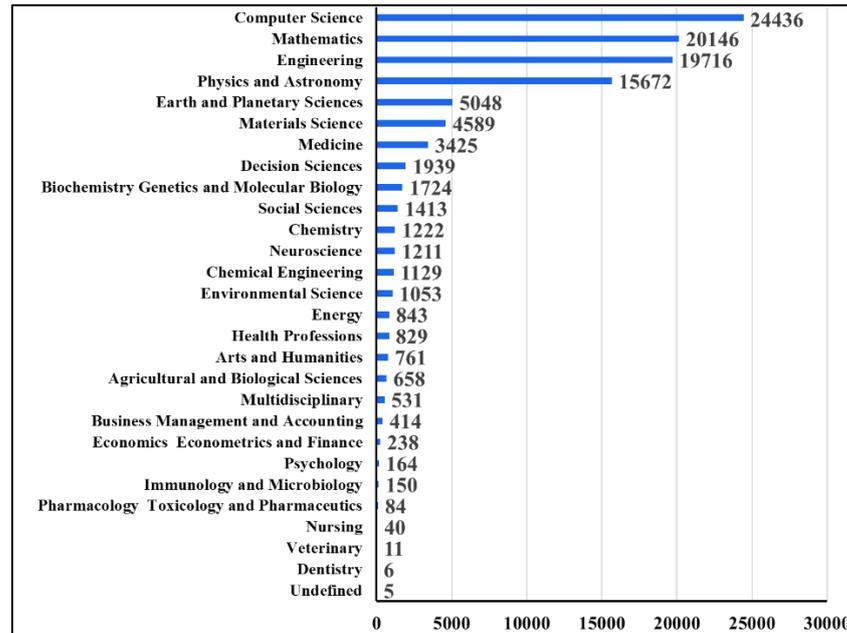


Gráfico 3: Distribuição das publicações por área que utilizam regularização.
Fonte: Base Scopus (2020).

Na Figura 19 é apresentada, de modo esquemático, a ideia básica para solução de problemas mal-postos. Uma informação adicional (*a priori*) é incorporada ao problema sendo modificado e torna-se um similar ao original, sendo transformado num problema bem-posto.

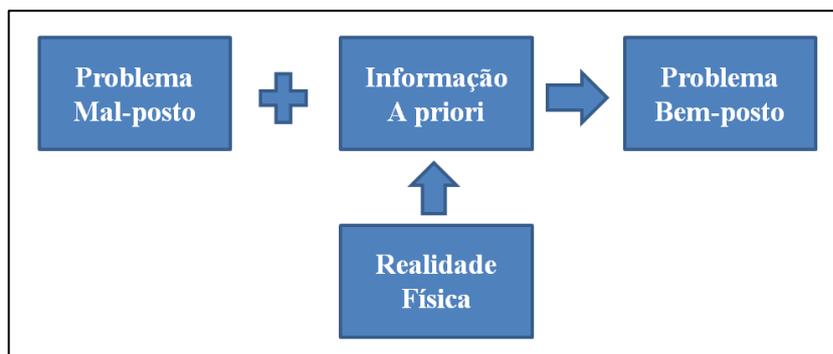


Figura 19: Representação esquemática de um problema mal –posto.
Fonte: Adaptado de Velho (2008).

Assim, um termo de regularização é frequentemente incorporado na função de erro tomográfico para resolver a não-unicidade do problema geofísico inverso (Equação 15).

Na literatura existem diversos métodos de regularização: mínimos-quadrados (*least square*), Tikhonov, Philips, Ivanov (*quasi-solutions*), Morozov, variação total (*total variation*), variação total modificada (*modified total variation*) entre outras. Em consulta realizada na base Scopus (2020) a quantidade de trabalhos publicados utilizando os tipos de regularização, onde

se destacam a de Tikhonov (6.202 publicações), mínimos-quadrados (4.560), variação total (3.522), Morozov (190), Philips (138) e Ivanov/*quase-solution* (58).

A escolha do tipo de norma a ser utilizado está condicionada pelo tipo de distribuição estatística que os dados seguem. De acordo com Menke (1989), o tipo de norma mais adotada nos problemas de inversão é a $L2$. A norma $L2$ parte da premissa que o erro dos dados observados deve apresentar uma distribuição gaussiana.

Antes das técnicas de regularização, acreditava-se que problemas mal-postos não tinham significado físico ou matemático (ZHDANOV, 2002). Entretanto, após o estabelecimento da regularização, teve início a evolução dos métodos de resolver problemas mal-postos (ZHDANOV, 2002) que, na prática, torna um problema mal-posto em bem-posto, ou seja, o transforma em solucionável. Isto é feito limitando este problema a um conjunto menor de soluções possíveis.

2.6.1 Regularização de Tikhonov

Segundo Zhdanov (2002), a importância dos trabalhos de Tikhonov relaciona-se à demonstração matemática de que os problemas ditos mal-postos podem ser solucionáveis. Para que o operador G^{-1} deva ser contínuo (estável) neste conjunto, é necessário que se conheça *a priori* a existência de uma solução esteja contida num subconjunto das possíveis soluções. Quando se seleciona esse subconjunto, o problema mal-posto torna-se condicionalmente bem-posto.

No caso particular de alguns sistemas lineares indeterminados (com número de incógnitas inferior ao número de equações), uma solução estudada foi à abordagem de mínimos quadrados de norma mínima, isto é, existe um termo adicional (a norma do vetor de incógnitas) associado ao termo de discrepância quadrática. Generalizando, é necessário fornecer informação adicional para resolver problemas mal-postos. Vários pesquisadores na década de 1960 notaram este fato. Os trabalhos de Ivanov (1962), Philips (1962), Twomey (1963) e Tikhonov (1963) se destacaram no campo da formulação geral da regularização para problemas mal-postos. O método da regularização consiste em determinar a partir da solução aproximada mais suave e verificar sua compatibilidade com os dados observados para determinado nível de ruído.

As técnicas de regularização têm como objetivo tornar o operador que inverte o dado em contínuo; que equivale a transformar as soluções em estáveis e o problema em bem-posto. A inversão ao ser regularizada, o problema a ser resolvido deixa de ser rigorosamente o problema original e torna-se um problema que tende ao original. O parâmetro de regularização

(λ) determina a ponderação dada à regularização no processo de inversão e conforme $\lambda \rightarrow 0$ a solução regularizada ($\mathbf{m}\lambda$) deve tender assintoticamente à solução correta \mathbf{m}_c (ZHDANOV, 2002), do mesmo modo como o operador regularizado deve tender ao operador \mathbf{G}^{-1} .

O problema inverso sem regularização para ser resolvido é necessário a minimização de $\|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}_s\|_2$, chamada de função objetivo (Equação 20):

$$\min \|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}_s\|_2 \quad \text{Eq. 28}$$

A regularização de Tikhonov de ordem zero, de acordo Aster *et al.*, (2005), é a minimização de $\|\mathbf{m}_s\|_2$ (o índice 2 indica que se trata de norma L2), de modo que $\|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}_s\| < \delta$.

A obtenção de uma expressão geral a ser minimizada, aplicam-se multiplicadores de Lagrange a condição dada, cujo resultado é (Equação 29):

$$\min \|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}_s\|_2^2 + \lambda^2 \|\mathbf{m}_s\|_2^2 \quad \text{Eq. 29}$$

A minimização da função é obtida ao derivar a Equação 29 em relação à \mathbf{m}_s e igualando à zero e obtém-se a equação para a regularização de Tikhonov de ordem zero (Equação 30):

$$(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda^2 \mathbf{I})\mathbf{m}_s = \mathbf{G}^T \mathbf{d} \quad \text{Eq. 30}$$

Onde:

$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa a matriz identidade e T indica a transposta da matriz.

A regularização de Tikhonov de ordem zero equivale ao método dos mínimos quadrados amortecidos. Conforme demonstrado por Aster *et al.* (2005), a norma dos parâmetros invertidos fica minimizada com o uso da regularização de ordem zero.

As regularizações de Tikhonov de ordem superior seguem a mesma lógica da regularização de ordem zero, substituindo a minimização da norma de \mathbf{m}_s pela minimização em função de \mathbf{m}_s (Equação 31).

$$\min \|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}_s\|_2^2 + \lambda^2 \|\mathbf{L}\mathbf{m}_s\|_2^2 \quad \text{Eq. 31}$$

Onde:

$\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{l \times N}$ (com $l \leq N$) é a matriz do operador regularizador de \mathbf{m}_s .

A regularização Tikhonov de primeira ordem usa a derivada primeira de \mathbf{m}_s (Equação 32) e a regularização de segunda ordem, a derivada segunda (Equação 33). Assim, de maneira mais geral tem-se:

$$L^{(1)}m_s(x, z) = \left(\frac{\partial m_s(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial m_s(x, z)}{\partial z} \right) \quad \text{Eq. 32}$$

$$L^{(2)}m_s(x, z) = \left(\frac{\partial^2 m_s(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_s(x, z)}{\partial z^2} \right) \quad \text{Eq. 33}$$

Análogo ao caso de ordem zero, obtém-se a equação normal:

$$(G^T G + \lambda^2 L^T L)m_s = G^T d \quad \text{Eq. 34}$$

Caso a matriz \mathbf{L} seja identidade recai-se na regularização de ordem zero. De acordo com Aster *et al.* (2005), um modo útil para se chegar à equação normal é considerar a minimização da Equação 35:

$$\min \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \lambda \mathbf{L} \end{bmatrix} m_s - \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad \text{Eq. 35}$$

Em vez de minimizar uma soma ponderada de desajuste e norma de modelo com ordem zero de Tikhonov, pode-se minimizar uma soma ponderada do resíduo e complexidade do modelo com a qual podemos projetar \mathbf{L} para penalizar uma medida da rugosidade de m . Por exemplo, podem-se penalizar desvios a partir de um modelo constante por construção da matriz \mathbf{L} como o operador da forma de primeira derivada (Equação 36). Essa matriz \mathbf{L} da Equação 36 gera regularização de Tikhonov de primeira ordem. Essa regularização favorece soluções “flats” e penaliza os gradientes. A matriz \mathbf{L} da regularização de Tikhonov de primeira ordem tem dimensão $\mathbb{R}^{(N-1) \times N}$ (QUIROZ, 2014).

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N} \quad \text{Eq. 36}$$

De modo alternativo, pode-se penalizar a rugosidade ou a curvatura maior em maior razão que o gradiente do modelo. Neste caso, pode-se utilizar a matriz \mathbf{L} que é a segunda derivada dada pela Equação 37. Usando essa matriz que gera a regularização de Tikhonov de

segunda ordem favorece soluções suaves. A matriz \mathbf{L} da regularização de Tikhonov de segunda ordem tem dimensão $\mathbb{R}^{(N-2) \times N}$.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-2) \times N}$$

Eq. 37

2.6.2 Regularização de Berryman

A definição da regularização de Berryman foi especificamente criada para quando cada elemento da matriz tomográfica \mathbf{G} representa o comprimento de cada raio numa célula do modelo a ser invertido, onde cada linha da matriz tomográfica correspondente a um raio traçado. Esta regularização tem como proposta considerar critérios físicos na escolha das matrizes regularizadoras (BERRYMAN, 1991).

As matrizes de regularização $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ e $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ definidas por Berryman (1991) são descritas pelas Equações 38 e 39:

$$C_{jj} = \sum_{i=1}^N G_{ij} \quad \text{Eq. 38}$$

$$D_{ii} = \sum_{j=1}^M G_{ij} \quad \text{Eq. 39}$$

Onde:

i é o índice da linha e j o índice da coluna da matriz; N é o número de linhas (raios) da matriz \mathbf{G} ; M é o número de colunas da matriz \mathbf{G} .

Cada um dos elementos da matriz diagonal $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ representa o comprimento total dos raios que atravessam cada uma das células do modelo e na matriz diagonal $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ cada um dos elementos é o comprimento total de um raio. Desse modo, as matrizes \mathbf{W} e $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$ podem ser definidas como:

$$\mathbf{W} = \mathbf{D}^{-1} \quad \text{Eq. 40}$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{C} \quad \text{Eq. 41}$$

A regularização de Berryman tem como equação normal:

$$(\mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G} \mathbf{m}_s + \lambda^2 \mathbf{R}^T \mathbf{R}) \mathbf{m}_s = \mathbf{G}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{d} \quad \text{Eq. 42}$$

A Equação 42 é equivalente a minimizar a função objetivo (Equação 43):

$$\min \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{W}} \mathbf{G} \\ \lambda \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{m}_s - \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{W}} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad \text{Eq. 43}$$

O estudo utilizará a regularização ao se utilizar as matrizes \mathbf{W} e \mathbf{R} tais como propostas por Berryman (1991), para o qual o valor do parâmetro λ no intervalo de 10^{-3} a 10^{-1} mostra-se suficiente para regularizar o sistema. Os pesos não são grandezas arbitrárias. O objetivo da regularização é, em última análise, resolver o problema de inversão não-linear e, portanto, que os argumentos dados para determinação dos pesos em esquemas de comparação de ponderações em outros contextos.

Em particular, esses pesos são frequentemente escolhidos com base em erros estatísticos (não correlacionados) nos dados. A suposição por trás dessas escolhas pode ser realmente muito boa em alguns casos, mas geralmente não no problema de inversão não linear. A hipótese de trabalho para esta análise é que a principal fonte de erro na inversão não linear não é o erro de medição, mas o erro devido às escolhas errôneas dos caminhos de raios realmente usados no algoritmo (BERRYMAN, 1991).

Os erros estatísticos nos dados tornam-se um problema significativo somente depois que é construído um conjunto confiável de caminhos de raios para que os erros devidos a caminhos de raios incorretos sejam menores que os erros nos dados de tempo de trânsito. De fato, para reconstruções de alto contraste, pode ser que os erros nos dados de tempo de trânsito sejam apenas uma pequena fração de um por cento, enquanto os erros introduzidos por escolhas errôneas de caminhos de raios são da ordem de dezena por cento.

De acordo com Berryman (1989), prevê-se um processo de duas etapas. Primeiro, resolve-se iterativamente o problema de inversão e um bom conjunto de caminhos de raios. Esta etapa requer o esquema de ponderação descrito aqui. Segundo uma vez que se tem um conjunto confiável de caminhos. O esquema de ponderação pode ser alterado para levar em consideração os erros estatísticos nos dados. Após esse processo usam-se argumentos físicos para construir um conjunto adequado de pesos.

Suponha que os dados de tempo de trânsito na reconstrução realmente venham de um modelo homogêneo, isto é, com gradiente nulo. Assim, a escolha produz a matriz de pesos mais simples, fornecendo um estimador linear e imparcial do fator de escala para um modelo de vagarosidade constante. Isso mostra que a proposta de Berryman não é apenas um regularizador, mas também um pré-condicionador. Segundo Stanton (2014), matrizes de pré-condicionamento podem ser aplicadas ao espaço do modelo tendo em vista a redução de possíveis soluções ao sistema. Vários autores têm utilizado diferentes matrizes como pré-condicionadores, a fim de atenuar ou até mesmo dar ênfase a certas características do modelo, bem como conseguir melhores taxas de convergência no processo de inversão (NEMETH *et al.*, 1999; BAHIA, 2016).

De acordo com Berryman (1991), espera-se que a relação sinal-ruído seja melhor em caminhos mais curtos do que em caminhos mais longos, uma vez que a atenuação geral geralmente será menor e a probabilidade de perder a verdadeira primeira chegada, portanto, menor. Segundo o autor, caminhos de teste mais curtos têm mais probabilidade de corresponder a caminhos reais que permanecem completamente no plano da imagem para problemas de reconstrução bidimensional. Uma desvantagem do uso desse esquema de ponderação é que, às vezes, o caminho do raio é longo porque a fonte e o receptor estão distantes.

Berryman (1991) argumenta que a ponderação inversa em relação ao comprimento do caminho dos raios tende a reduzir a possível melhoria significativa na resolução horizontal que pode advir da inclusão desses raios. A desvantagem pode ser contornada usando mais raios diagonais, isto é, usando fontes e receptores mais espaçados para os raios diagonais. Então, os pesos dos raios individuais são menores, mas sua influência geral na reconstrução ainda pode ser significativa.

2.6.3 Regularização *Total variation (TV)*

Como mencionado na pesquisa realizada na base Scopus, existem outros métodos de regularização conhecidos na literatura, entre estas a *Total Variation (TV – variação total)* e suas modificações. A regularização TV proposta por Rudin *et al.* (1992) utiliza norma L1 de derivadas que mais apropriados para reestruturação de imagem. A variação total desempenha um papel importante quando é necessária uma estimativa precisa das descontinuidades nas soluções (RUDIN *et al.* 1992). Em problemas com grandes descontinuidades nas propriedades do modelo, como no caso de um modelo de camadas geológicas, a TV consegue recuperar as

estruturas (ASTER *et al.*, 2005). A função objetivo a ser minimizada com o termo de regularização TV fica (Equação 44):

$$\min \|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}_s\|_2^2 + \tau \|\mathbf{m}_s\|_{TV} \quad \text{Eq. 44}$$

Onde o termo da regularização TV proposto por Rudin *et al.* (1992) para um modelo 2-D é definido na Equação 45:

$$\|\mathbf{m}_s\|_{TV} = \sum_{i,j} \sqrt{|(\nabla_x \mathbf{m})_{i,j}|^2 + |(\nabla_z \mathbf{m})_{i,j}|^2} \quad \text{Eq. 45}$$

Onde:

$\nabla_x \mathbf{m}$ e $\nabla_z \mathbf{m}$ são as diferenças locais de primeira-ordem de modelo 2-D nas direções x e z, respectivamente e τ o parâmetro de regularização.

O parâmetro τ da regularização TV é usado para o balanceamento relativo entre o resíduo e o modelo com regularização. A regularização TV é a minimização da norma L1 da primeira derivada do modelo ao longo das direções horizontal e vertical. É importante destacar que uma escolha adequada do parâmetro τ na Equação 45, assim como estratégias de utilização de esquemas adaptativos, que atualizem o parâmetro ao longo do processo de inversão, são etapas pertinentes para a estabilização do problema inverso. Se o valor atribuído para τ for muito alto, o problema inverso tende a se tornar bem posto. Porém, a aplicação de tal estratégia pode prejudicar o ajuste entre os dados observados e os calculados, ou seja, obtém-se uma solução menos relativa ao problema original. Por outro lado, adotando-se valor de τ muito pequeno, ocorrerá pouca influência da regularização no problema original, de modo que o problema continuará mal posto. A inversão geofísica com a regularização TV ajuda a preservar a nitidez das interfaces nas estruturas subsuperficiais (JIANG e ZHANG, 2016). Entretanto, para $(\nabla_x \mathbf{m}) = (\nabla_z \mathbf{m}) = 0$ a regularização TV na Equação 45 não é diferenciável. Para evitar problemas associados a não diferenciabilidade, Acar e Vogel (1994) adicionaram ao termo original da TV um pequeno número positivo α (Equação 46):

$$\|\mathbf{m}_s\|_{TV,\alpha} = \sum_{i,j} \sqrt{|(\nabla_x \mathbf{m})_{i,j}|^2 + |(\nabla_z \mathbf{m})_{i,j}|^2 + \alpha} \quad \text{Eq. 46}$$

Vogel (2002) fornece os métodos computacionais para resolver o problema de regularização TV. O parâmetro positivo α na função \mathbf{m} TV evita dificuldades associadas à não

diferenciabilidade do funcional da TV. Este parâmetro também controla o comportamento do termo de regularização. Se o valor atribuído a α for grande, a regularização da TV se comportará como uma forma quadrática. Como resultado, o método recupera uma solução suave. Por outro lado, a aproximação do termo de regularização da TV na Equação 46 pode causar instabilidade numérica. A convergência da inversão é altamente sensível ao parâmetro α (JIANG e ZHANG, 2016).

3. ESTUDO DE CASO SOBRE A REGULARIZAÇÃO DA TOMOGRAFIA DE REFRAÇÃO

O presente trabalho apresenta um estudo sobre o impacto da regularização na tomografia de refração. A área de estudo fica num ambiente costeiro próximo ao Sul de Boston, em Massachusetts (ZHANG e TOKSÖZ, 1998), um modelo de velocidade 2-D de estrutura rasa.

Os parâmetros de aquisição para a modelagem direta estão descritos no Quadro 2 e representados na Figura 20.

Descrição dos Dados de Aquisição	
Intervalo entre Pontos de Tiro	40 m
Número Total de Tiros	176
Profundidade das Fontes e Receptores	20 m
Intervalo entre Receptores	10 m
Número Total de Receptores	150

Quadro 2: Parâmetros da geometria de aquisição.
Fonte: Bulhões *et al.* (2019).

A Figura 20 exibe a representação com o modelo de velocidade real e a geometria de aquisição. O modelo verdadeiro contém três camadas e estrutura de um canal de fundo marinho, com velocidades de 1500 m/s (água), 2000 m/s e 2500 m/s. Além disso, o modelo de velocidade é discretizado com espaçamento uniforme de 10 m, totalizando 250×25 células. Comparou-se no estudo o modelo verdadeiro com os resultados obtidos pela tomografia de tempo de trânsito sem regularização e com os esquemas de regularização de Tikhonov e Berryman. Os tempos de trânsito para tomografia de refração foram calculados por modelagem direta, com o mesmo algoritmo usado na tomografia para cálculo do tempo de trânsito.

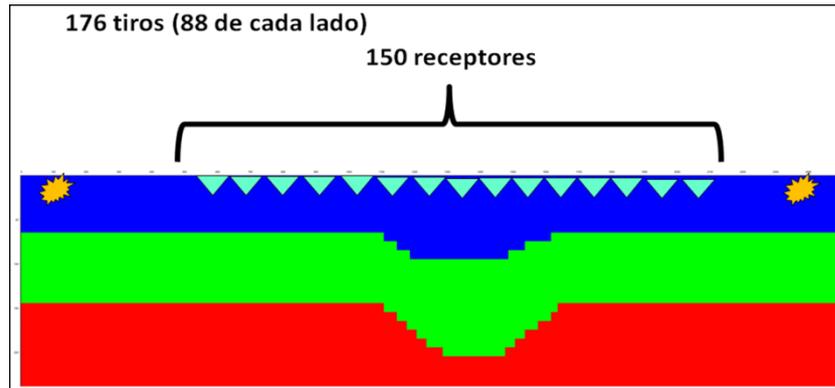


Figura 20: Representação com o modelo de velocidade real e a geometria de aquisição.

Fonte: Bulhões *et al.* (2019).

Na Figura 21 é exibida a matriz de tempo-trânsito entre os pares fonte-receptor. Essa matriz contém 176 fontes, 150 receptores e os tempos de trânsito medidos entre os respectivos pares.

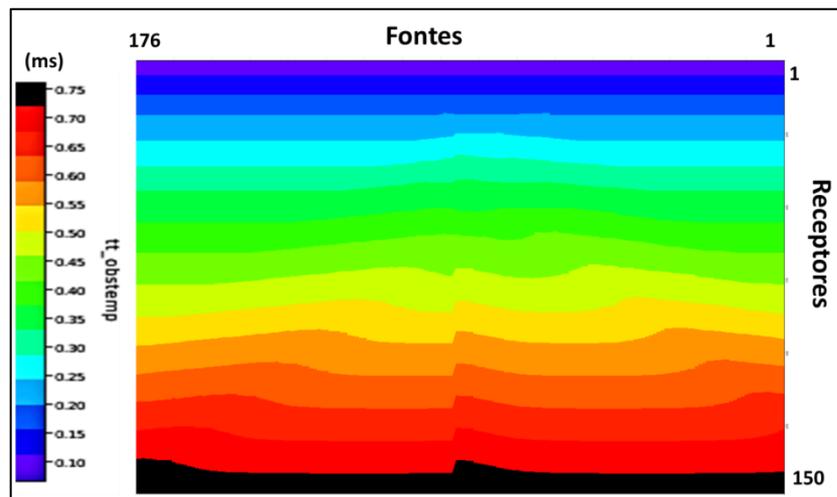


Figura 21: Tempo-trânsito fonte-receptor.

3.1 MODELO INICIAL

O modelo inicial contém informações hipotéticas e é construído após serem realizadas considerações a respeito da estrutura geológica que se espera encontrar na região estudada (CAPUCCI, 2013). Para a tomografia de refração, o modelo inicial é um modelo de velocidades que possa auxiliar na caracterização das estruturas geológicas em subsuperfície.

Assim, tendo os valores de velocidade dos meios por onde se propaga a onda e os tempos de trânsito observado em um levantamento ou calculado a partir de um modelo sintético o que poderia calcular o problema direto, primeiro passo do fluxo de inversão. No entanto, para

definir um primeiro modelo, alguns aspectos devem ser observados: há que se garantir que o modelo fornecido para começar a inversão tomográfica seja suave e que os contrastes de velocidade não sejam abruptos (CAPUCCI, 2013).

Nota-se que as descontinuidades no gradiente podem fazer com que os percursos de dois raios com trajetórias similares, ao incidirem em uma interface em ambos os lados, se direcionem para diferentes ângulos de propagação. Outro ponto a ser apreciado tem relação com os métodos de minimização de um problema. Em sua maioria, é demandado que o ponto de partida no caso da tomografia, o modelo inicial de velocidades seja próximo o suficiente da solução para que o problema seja convergente. Não se respeitando este aspecto, há a possibilidade de se afastar da solução “real” do problema, encontrando um mínimo local da função, o processo se encerrará, porém ainda distante do modelo real que se encontra em subsuperfície. Em outros casos, pode até ser interrompido forçadamente por não convergir para nenhum mínimo, nem local, muito menos global.

Posteriormente, a partir deste modelo inicial, obtêm-se os dados calculados: tempo de trânsito das ondas refratadas, os quais serão utilizados no processo de inversão tomográfica. Deve-se atentar que quanto melhor for o modelo inicial da inversão e mais aproximado do modelo alvo, mais rapidamente o processo de inversão irá convergir para uma solução.

Outro fator que influencia no resultado obtido pela inversão tomográfica é o modelo de vagarosidades inicial. Uma má escolha deste modelo pode levar o processo iterativo de inversão a convergir para um mínimo local da função erro e, a solução encontrada, além de não ser a melhor possível, pode não fazer nenhum sentido do ponto de vista geológico.

Na análise do efeito da convergência da tomografia em função do modelo inicial analisaram-se três cenários de modelo inicial para o caso do canal (Figura 22). O modelo 1 é plano paralelo horizontal crescente com a profundidade com as velocidades de 1500 m/s, 2000 m/s e 2500 m/s (Figura 22a) e os casos 2 e 3 também com camadas planas paralelas horizontais com os mesmos valores das velocidades, com as camadas invertidas (Figura 22b e Figura 22c).

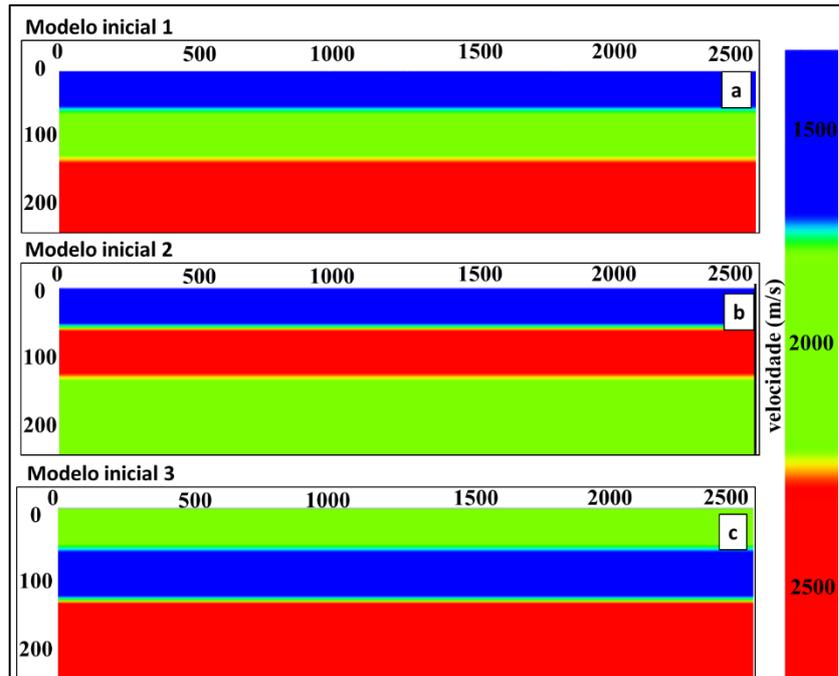


Figura 22: Três cenários de modelo inicial da tomografia de refração.

No Gráfico 4 estão representados os resíduos RMS dos tempos de trânsito calculados em função da iteração. Os modelos iniciais 1 e 3 convergem no mesmo valor de resíduo, em torno de $6,0 \cdot 10^{-7}$ e o caso 2 apresenta instabilidade e não converge. A velocidade de convergência para caso 1 é muito mais rápida, em torno da 11^a iteração, enquanto que para o cenário 2 a convergência ocorre na 24^a iteração.

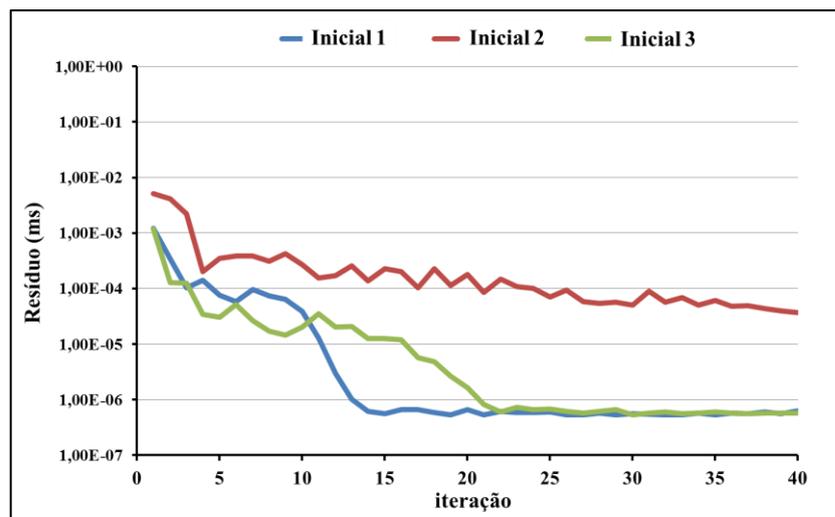


Gráfico 4: Gráfico do resíduo para diferentes cenários de modelo inicial.

3.2 ESTUDO DO EFEITO DA REGULARIZAÇÃO

A inversão tomográfica de refração foi processada para cinco situações: sem regularização; quatro cenários usando regularização de Tikhonov (primeira ordem, primeira ordem utilizando apenas componente horizontal, primeira ordem com esquema progressivo e segunda ordem) e regularização de Berryman. Para os casos com regularização de Tikhonov utilizaram-se parâmetros regularizadores λ variando entre 10^{-8} e 10^3 , com 40 iterações. No caso da regularização de Berryman os parâmetros λ utilizados foram entre 10^{-8} e 10^{-1} (os parâmetros λ apresentam significados diferentes para as regularizações de Tikhonov e Berryman).

O modelo inicial para a investigação do efeito dos parâmetros de regularização está representado na Figura 23.

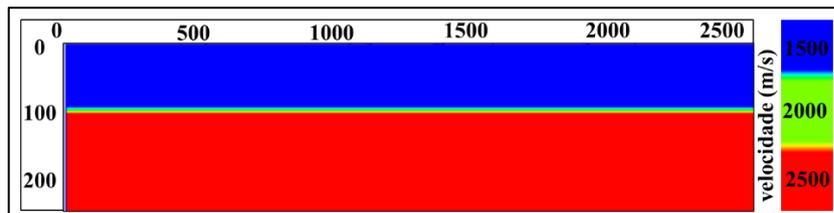


Figura 23: Modelo Inicial de entrada da tomografia de refração.

Os modelos reais e o resultado da tomografia utilizada para a regularização são apresentados na Figura 24 e a diferença entre o modelo real e calculado está na Figura 25.

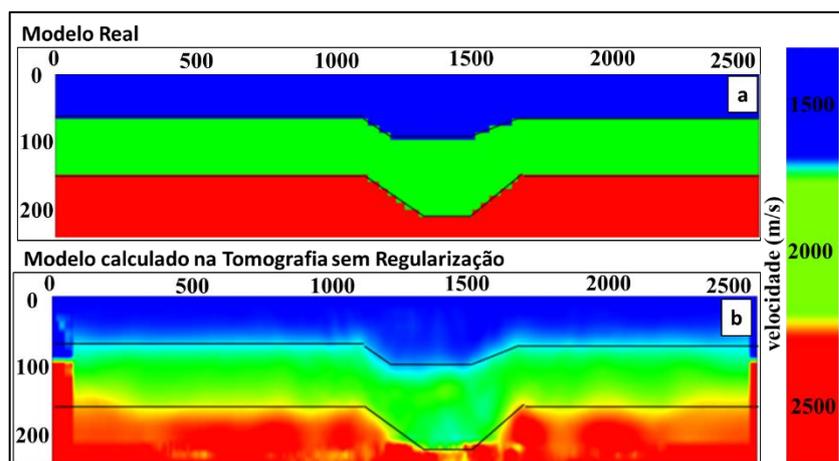


Figura 24: (a) Modelo de velocidade real e (b) Resultado da Tomografia sem aplicar a regularização.

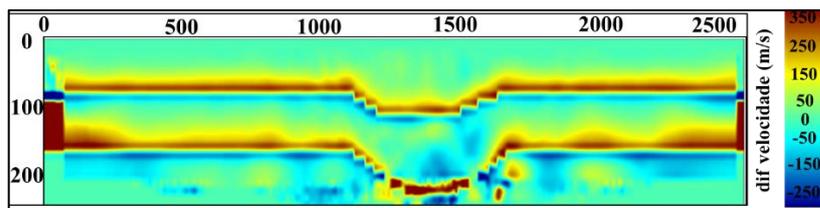


Figura 25: Diferença entre a velocidade calculada pela tomografia sem regularização e o modelo real.

O resíduo do processo tomográfico em função da iteração é mostrado no Gráfico 5. O eixo referente ao resíduo está na escala logarítmica na base 10. Observa-se nesse gráfico que a convergência da inversão tomográfica ocorre a partir da iteração 28.

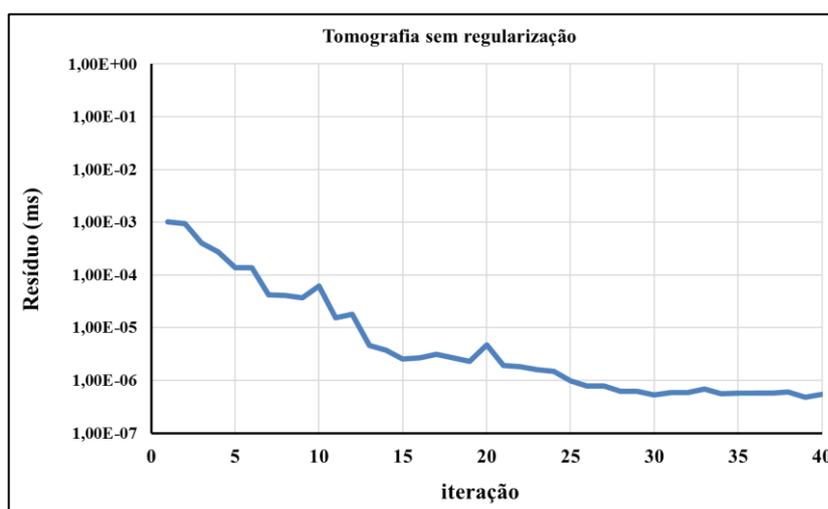


Gráfico 5: Variação do resíduo da inversão tomográfica sem regularização em função da iteração.

3.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A análise dos efeitos da regularização se deu por meio de estudo de suscetibilidade dos parâmetros de regularização, que impactam na convergência e estabilidade do algoritmo e do modelo resultante. A estabilidade será analisada utilizando gráficos do comportamento do resíduo e da quantidade de elementos não-nulos da matriz tomográfica em função da iteração.

A matriz de sensibilidade (matriz tomográfica) armazena as informações sobre os caminhos percorridos pelo raio ao longo do modelo. A matriz de sensibilidade é constituída pela quantidade de raios (número de linhas da matriz) e a quantidade de parâmetros (número de colunas). Os valores dos elementos desta matriz são calculados utilizando-se o método de traçado de raio. A técnica adotada neste trabalho é a das diferenças finitas da função eikonal.

Então, dependendo da discretização adotada, a matriz de sensibilidade pode se tornar um tanto extensa. Na Figura 26 está representado um exemplo da construção da matriz tomográfica a partir do modelo e da trajetória dos raios.

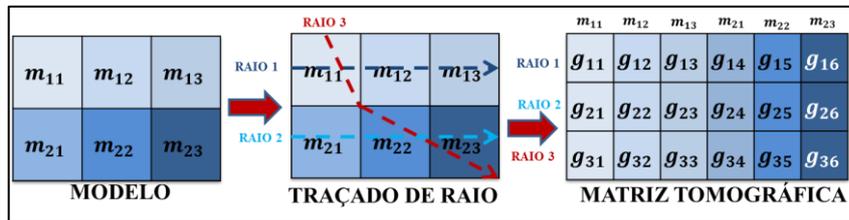


Figura 26: Representação esquemática da matriz tomográfica construída a partir de um modelo discretizado por 6 células regulares.

Fonte: Adaptado de Carbonei (2018).

Cada elemento da matriz tomográfica relaciona o raio com a célula do modelo que por este atravessa. Se o raio não atravessar determinada célula, o elemento da matriz tomográfica terá valor 0 (zero) associado na linha representativa do raio e na coluna referente ao modelo. (Figura 27). A quantidade de zeros na matriz pode implicar em questões quanto à sua inversibilidade.

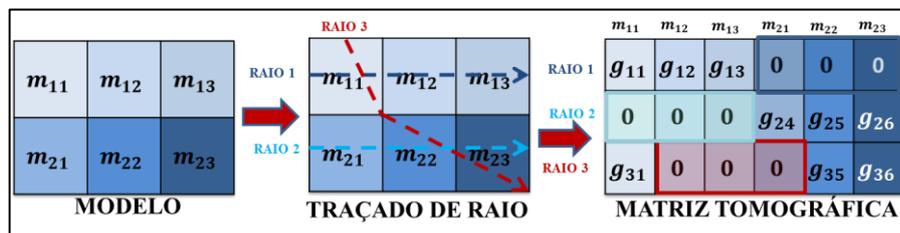


Figura 27: Exemplo da matriz de sensibilidade construída a partir de um modelo discretizado por células regulares com 3 colunas e 2 linhas.

Fonte: Adaptado de Carbonei (2018).

O Gráfico 6 apresenta a variação dos elementos não-nulos da matriz tomográfica em função da iteração na inversão tomográfica sem regularização. Neste gráfico observa-se que até a iteração 28 ocorrem instabilidades numéricas, principalmente em torno da iteração 20. Esta instabilidade está associada à inversibilidade da matriz tomográfica \mathbf{G} , influenciada pela quantidade de elementos nulos dessa matriz, que afeta o termo de atualização do modelo de velocidade $\Delta \mathbf{m}$ (Equação 25).

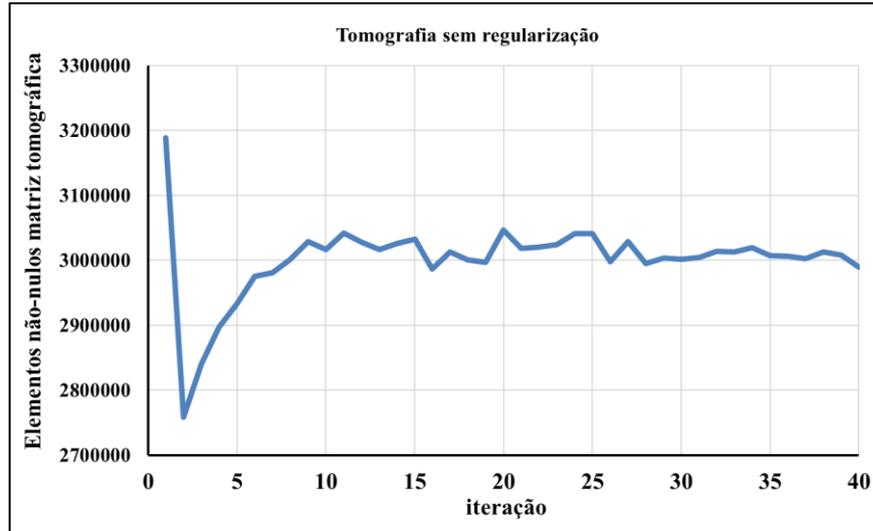


Gráfico 6: Elementos não-nulos da matriz tomográfica em função da iteração da inversão tomográfica sem regularização.

3.3.1 Regularização de Tikhonov

Para a análise do efeito da regularização na tomografia de refração no presente trabalho utilizou-se o programa implementado pelo Grupo de Imageamento Sísmico da Universidade Federal Fluminense, baseado nos trabalhos de Almeida (2013) TOMO_GISIS, que utiliza diferenças finitas.

As regularizações de Tikhonov aplicadas foram as de primeira e segunda ordem. No caso da ordem 1, aplicou-se três implementações: (i) convencional (derivada nas direções horizontal e vertical), (ii) a derivada na componente horizontal e (iii) a derivada com esquema progressivo.

3.3.1.1 Regularização de Tikhonov de ordem 1

Nesta seção os resultados da inversão tomográfica de refração aplicando a regularização de Tikhonov de ordem 1 são apresentados. Nesta regularização o termo que é acrescentado para estabilizar o problema inverso é a primeira derivada nas direções x e z (e y no caso 3-D), definida pela Equação 32. Para implementação por diferenças finitas o operador é reescrito de acordo com a Equação 47:

$$L^{(1)}m_s(x, z) = \frac{m_s(x, z) - m_s(x - \Delta x, z)}{\Delta x} + \frac{m_s(x, z) - m_s(x, z - \Delta z)}{\Delta z} + o(\Delta x, \Delta z) \quad \text{Eq. 47}$$

Onde:

Δx e Δz são os passos da diferença finita nas direções x e z respectivamente e $o(\Delta x, \Delta z)$ são os elementos de derivadas de maiores ordens desconsideradas.

Aplicou-se a inversão tomográfica para parâmetros regularizadores variando entre 10^{-8} e 10^3 . No Gráfico 7 estão representados os resíduos dos tempos de trânsito em função da iteração para os diferentes parâmetros de regularização. Observou-se que para valores maiores que 10^{-5} acontece uma grande instabilidade no algoritmo tomográfico.

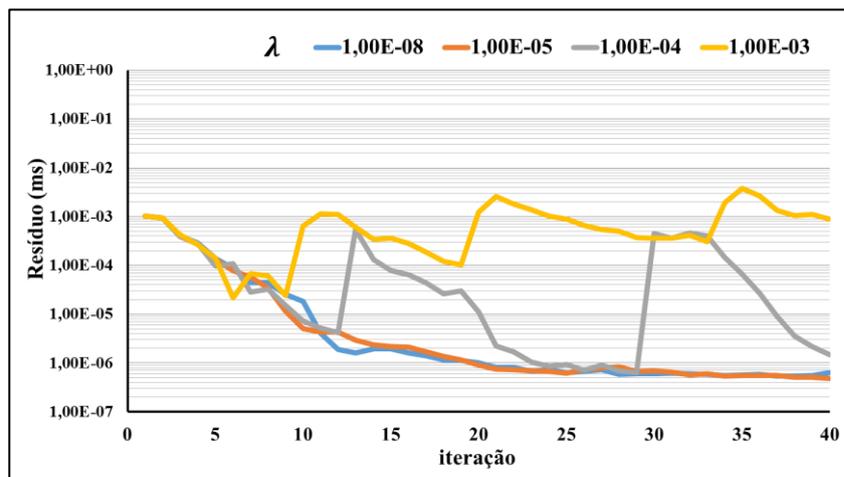


Gráfico 7: Evolução do resíduo do tempo de trânsito em função da iteração da tomografia usando regularização de Tikhonov de 1ª ordem.

O parâmetro de regularização λ adicionado à inversão influencia na matriz sensibilidade. Neste estudo, analisou-se o comportamento da matriz em função da iteração para cada parâmetro λ , onde a instabilidade numérica observada no Gráfico 7 também é notada no Gráfico 8, em que são apresentados o número de elementos não-nulos da matriz tomográfica em relação a iteração. Observa-se no Gráfico 8 que quanto menor for o número de elementos não-nulos da matriz tomográfica, menor será a quantidade de raios registrados nos geofones. Desse modo, para os parâmetros λ maiores que 10^{-4} verifica-se uma grande variação do número de elementos não-nulos (raios), o que indica uma grande flutuação do termo Δm , que atualiza os modelos de velocidades calculados nos passos seguintes da inversão tomográfica. O número dos termos não-nulos estabiliza a partir do passo 7 para os parâmetros regularizadores λ menores que 10^{-5} , indicando a inversibilidade da matriz tomográfica.

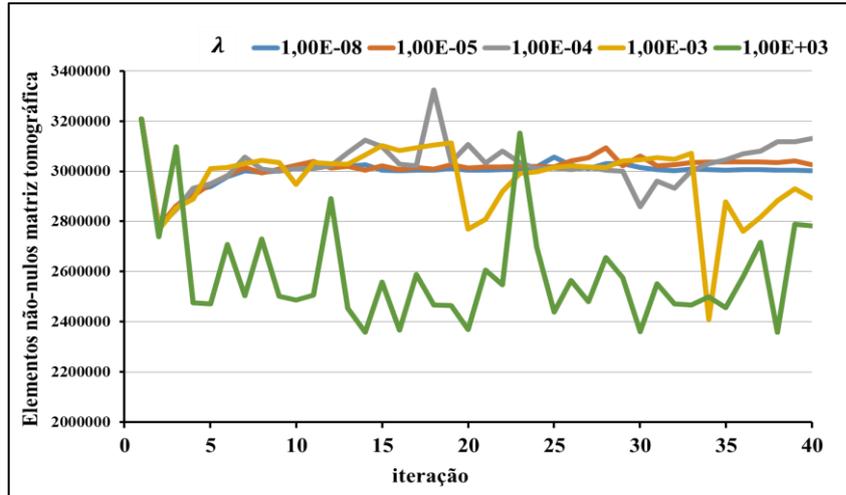


Gráfico 8: Número de elementos não-nulos da matriz tomográfica em função da iteração tomográfica utilizando diferentes parâmetros de regularização de Tikhonov de 1ª ordem.

Os modelos resultantes da inversão para os respectivos parâmetros de Tikhonov são mostrados na Figura 28. As instabilidades numéricas existentes nos Gráfico 7 e Gráfico 8 são também observadas nas seções de velocidade nos parâmetros utilizados. Para valores menores que 10^{-5} verificou-se que as seções convergiram e reconstituíram o grande *trend* das estruturas reais. Entretanto, identificaram-se distorções entre a segunda e terceira camadas (Figura 28c e Figura 28d).

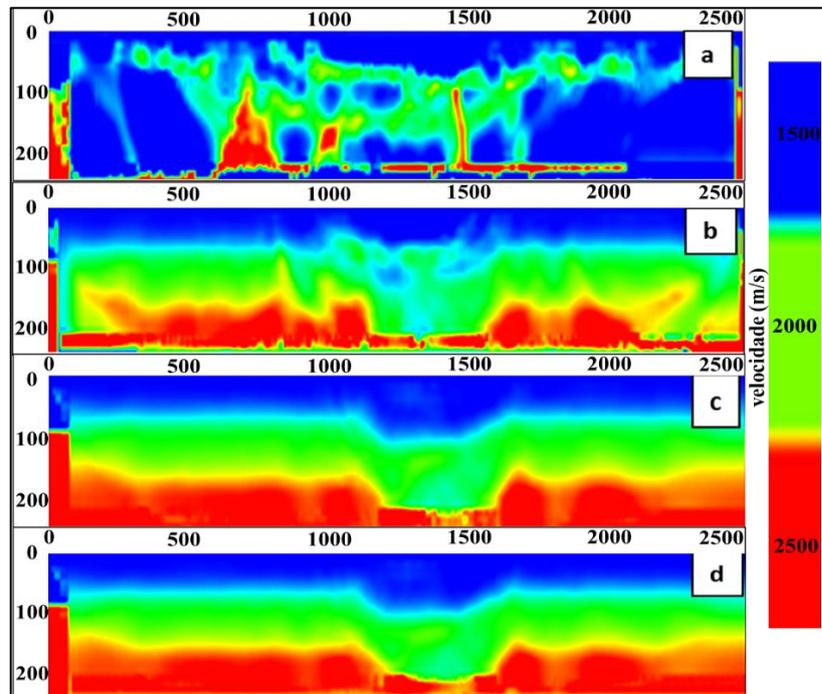


Figura 28: Seções com o modelo de velocidade resultantes da tomografia para os parâmetros de regularização de Tikhonov de 1ª ordem (a) $\lambda=10^{-3}$, (b) $\lambda=10^{-4}$, (c) $\lambda=10^{-5}$, (d) $\lambda=10^{-8}$.

3.3.1.2 Regularização De Tikhonov De Ordem 1 Apenas Componente Horizontal

A segunda abordagem de regularização adotada foi a adaptação do regularizador de Tikhonov de ordem 1 utilizando apenas a componente horizontal do operador derivada que por diferenças finitas é dada pela Equação 48:

$$L^{(1)}m_s(x, z) = \frac{m_s(x, z) - m_s(x - \Delta x, z)}{\Delta x} + o(\Delta x, \Delta z) \quad \text{Eq. 48}$$

Os resultados obtidos nessa variante apresentaram maior estabilidade numérica e melhoria na convergência da inversão tomográfica conforme mostrado no Gráfico 9.

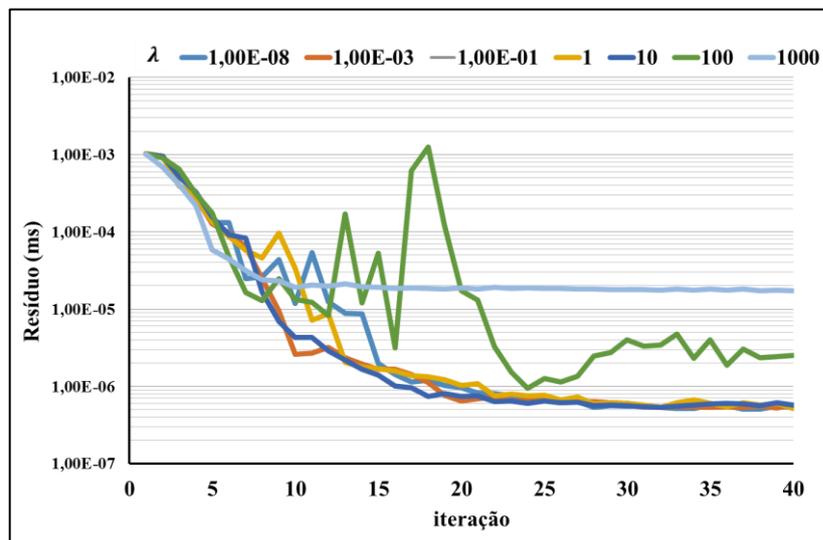


Gráfico 9: Evolução do resíduo do tempo de trânsito em função da iteração da tomografia usando regularização de Tikhonov de 1ª ordem com componente horizontal.

A instabilidade numérica que ocorreu para a regularização de ordem 1 componente horizontal foi na utilização do parâmetro $\lambda = 10^{-1}$. Quando se utiliza valores de λ maiores 100, a convergência do resíduo ocorre para valores maiores que os demais testados. Essa convergência indica que a função objetivo foi para um mínimo local. O mesmo efeito é observado no Gráfico 10 que apresenta o resíduo em função de λ . No Gráfico 10 também é observada a variação do resíduo em função das iterações: para $\lambda=10$ e $\lambda = 10^{-3}$ a convergência acontece em menos iterações, pois os valores dos resíduos são mais próximos nos passos da inversão tomográfica.

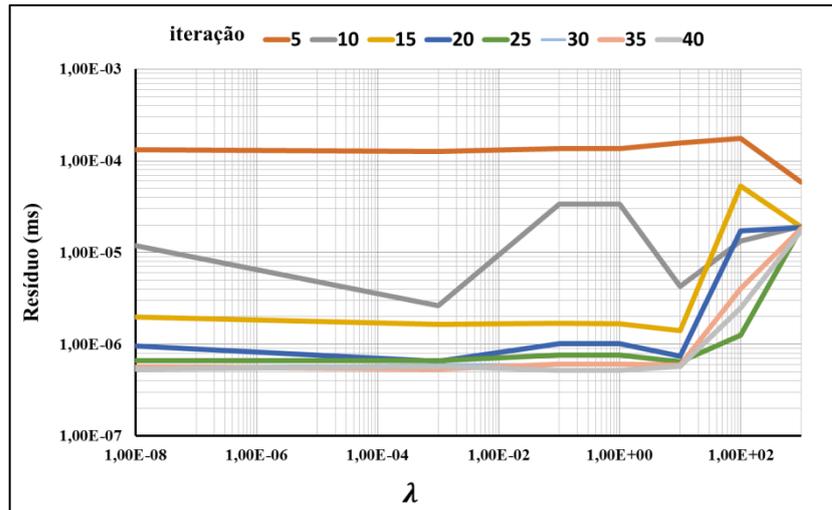


Gráfico 10: Resíduo RMS do tempo de trânsito em função do parâmetro de regularização de Tikhonov de 1ª ordem com componente horizontal.

No Gráfico 11 é apresentado o número de elementos não-nulos da matriz tomográfica em função da iteração e são identificados os mesmos efeitos, sob uma ótica diferente: para $\lambda > 100$ ocorre uma convergência para um número menor de elementos não-nulos; por outro lado, para $\lambda = 10^{-1}$ ocorre uma grande flutuação nesse número.

A quantidade de termos não-nulos inicial depende do modelo de velocidade inicial escolhida. Observa-se uma diminuição abrupta de termos não nulos da 1ª para 2ª iteração. Ao analisar modelos de velocidade referentes aos dois primeiros passos da inversão tomográfica, a compreensão de diminuição fica mais bem compreendida (Figura 29): o modelo de velocidade da 2ª iteração (Figura 29b) apresenta inversão de velocidade na primeira camada oriunda do modelo inicial. Devido ao fato de não ocorrer refração quando a velocidade diminui, a quantidade de raios que chegarão aos receptores será menor.

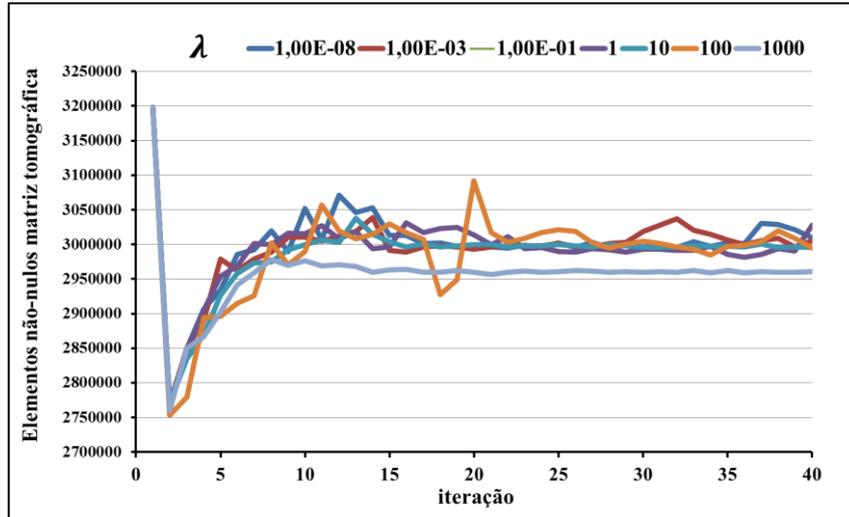


Gráfico 11: Quantidade de elementos não-nulos da matriz tomográfica em função da iteração para regularização de Tikhonov de 1ª ordem componente horizontal.

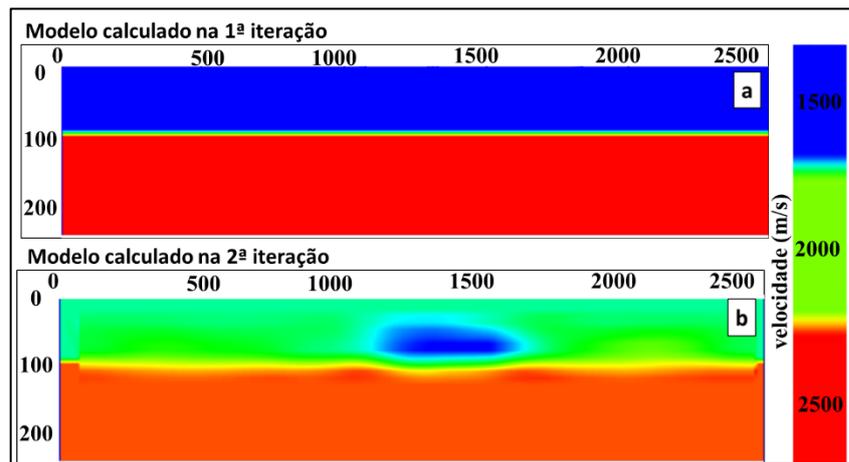


Figura 29: (a) Modelo de velocidade inicial e (b) Modelo de velocidade resultante da 2ª iteração tomográfica.

Para o caso $\lambda=100$ observa-se uma instabilidade nos Gráfico 10 e Gráfico 11 entre as iterações 15 e 16. Esta instabilidade está associada à inversibilidade da matriz \mathbf{G} , que influencia o termo de atualização do modelo de velocidade $\Delta \mathbf{m}$ (Equação 25). Na Figura 30 estão os modelos de velocidade dos passos 15 e 16.

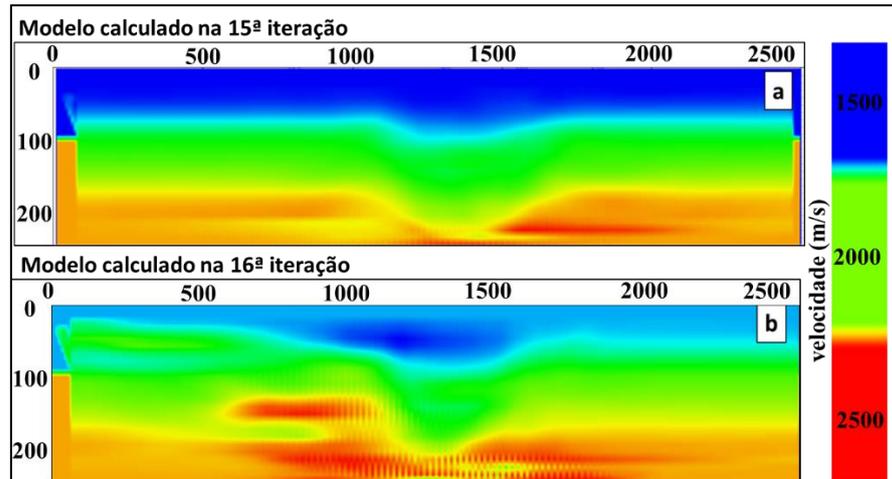


Figura 30: Modelos de velocidade resultantes da (a) iteração 15 e (b) iteração 16.

A Figura 31 exibe o resultado da tomografia usando regularização de Tikhonov de ordem 1 apenas com derivada na componente horizontal usando os parâmetros (a) $\lambda=10^3$; (b) $\lambda=10^2$; (c) $\lambda=10^1$; (d) $\lambda=1$; (e) $\lambda=10^{-1}$; (f) $\lambda=10^{-2}$, (g) $\lambda=10^{-8}$. Para os valores de λ a partir de 100 ocorre uma forte suavização do modelo resultante, aproximando-o de modelos de um modelo de camadas planas, paralelas e horizontais (Figura 31a e b). Os valores abaixo de 100 apresentam maior similaridade com o modelo geológico original (Figura 31 e,f,g). Entretanto, para os valores menores que 1, as estruturas entre a segunda e terceira camadas apresentam distorções. Para os valores de 100 essas distorções são minimizadas (Figura 31d).

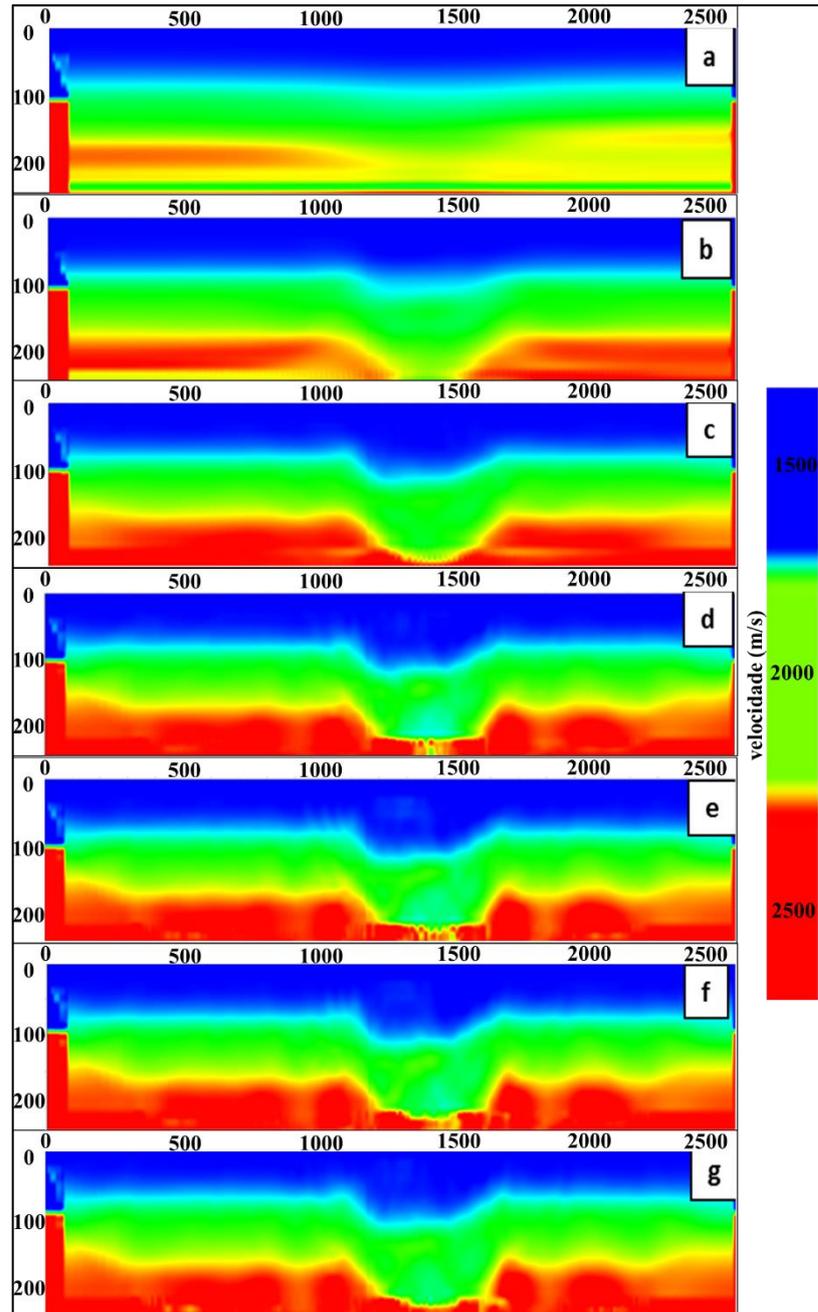


Figura 31: Seções de velocidade resultantes da tomografia usando a regularização Tikhonov de 1ª ordem com componente horizontal. (a) $\lambda=10^3$, (b) $\lambda=10^2$, (c) $\lambda=10$, (d) $\lambda=1$, (e) $\lambda=10^{-1}$, (f) $\lambda=10^{-2}$, (g) $\lambda=10^{-8}$

Observa-se que as seções de velocidade obtidas pela tomografia usando regularização de Tikhonov de 1ª ordem componente horizontal, conforme exibido na Figura 31, apresentam resultados mais estáveis de um modo geral que da 1ª ordem convencional exibida na Figura 28. Além disso, para o valor regularizador ótimo ($\lambda=10$) a distorção estrutural na segunda camada é minimizada quando comparada a aplicação da regularização de 1ª ordem convencional.

O resultado dos tempos de trânsito calculados da inversão tomográfica em função dos pares fonte-receptor comparadas o dado registrado do sintético está representado na Figura 32.

Na Figura 32a estão os tempos de trânsito registrados, na Figura 32b os tempos de trânsito calculados pela inversão tomográfica após 40 iterações e na Figura 32c a diferença entre o calculado e o registrado. O resíduo RMS é da ordem $5,76 \cdot 10^{-7}$ ms. As maiores diferenças ocorrem entre os pares de fontes 80-90 e receptores 30-40.

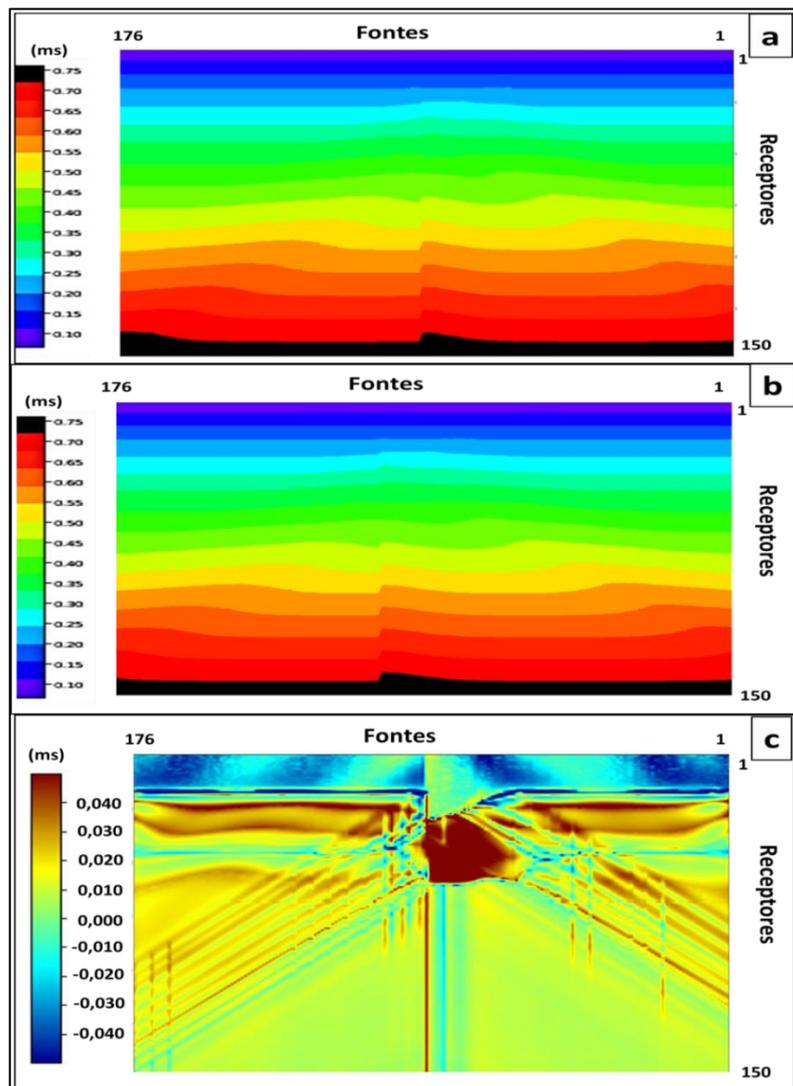


Figura 32: Diagrama dos tempos de trânsito entre fontes e receptores (a) registrados pelo modelo real (dado) e (b) calculado pela tomografia na 40ª iteração. (c) diferença entre o tempo de trânsito registrado e o calculado.

3.3.1.3 Regularização de Tikhonov de ordem 1 usando esquema progressivo

A terceira abordagem adotada para implementação da regularização de Tikhonov de ordem 1 foi a utilização do esquema progressivo no operador derivada. Na forma de diferenças finitas é dada pela Equação 49:

$$L^{(1)}m_s(x, z) = \frac{m_s(x+\Delta x, z) - m_s(x, z)}{\Delta x} + \frac{m_s(x, z+\Delta z) - m_s(x, z)}{\Delta z} + o(\Delta x, \Delta z) \text{ Eq. 49}$$

No Gráfico 12 é apresentado o resíduo do tempo de trânsito calculado em função dos passos do processo tomográfico para os parâmetros de regularização. Para $\lambda = 100$ uma instabilidade numérica é observada durante o processo tomográfico entre as iterações 9 e 24 e converge em torno de $1,0 \cdot 10^{-6}$. Observa-se também que, para os valores menores que 100, o processo transcorre de modo suave sem variações bruscas e o resíduo converge para valores de aproximadamente $6,0 \cdot 10^{-7}$. Para $\lambda=1000$, o resíduo converge para $1,0 \cdot 10^{-5}$ a partir da 10ª iteração (o modelo converge para um mínimo local).

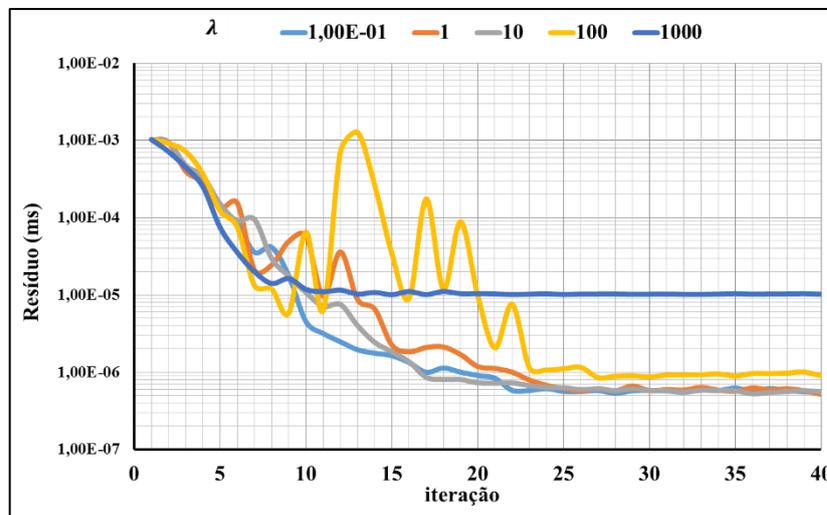


Gráfico 12: Evolução do resíduo do tempo de trânsito em função da iteração da tomografia usando regularização de Tikhonov de 1ª ordem com esquema progressivo.

No Gráfico 13 do resíduo em função do parâmetro de regularização λ , observa-se que para o valor 10 é o que melhor regulariza o dado. Para $\lambda=10$ observa-se também convergência em menor número de iterações, na qual o valor do resíduo para cada iteração tomográfica está mais próximo dos passos seguintes.

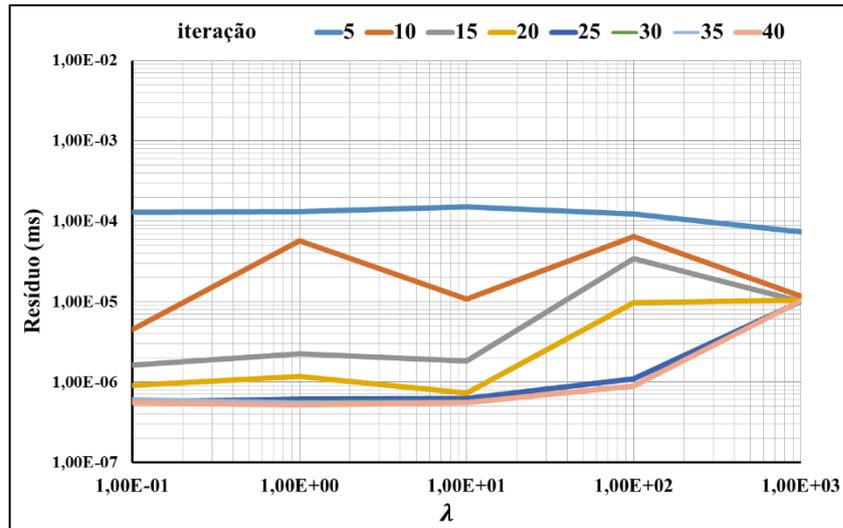


Gráfico 13: Resíduo RMS do tempo de trânsito em função do parâmetro de regularização de Tikhonov de 1ª ordem com esquema progressivo.

O Gráfico 14 apresenta a evolução do número de elementos não-nulos da matriz tomográfica em função da iteração. A curva referente ao parâmetro $\lambda=10$ (cor cinza) que apresenta maior estabilidade numérica.

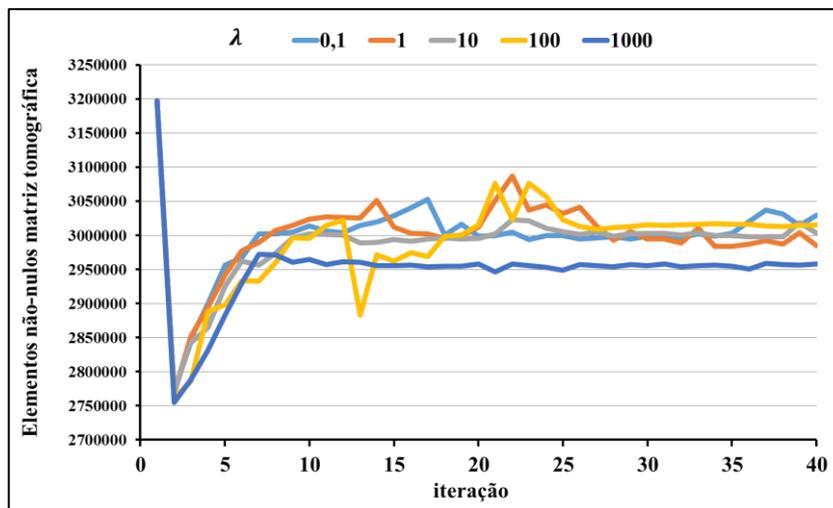


Gráfico 14: Número de elementos não-nulos da matriz tomográfica em função da iteração utilizando regularização de Tikhonov de 1ª ordem com esquema progressivo.

A Figura 33 apresenta o resultado da tomografia usando regularização de Tikhonov de ordem 1 com esquema progressivo usando os parâmetros (a) $\lambda=10^3$; (b) $\lambda=10^2$; (c) $\lambda=10^1$; (d) $\lambda=1$; (e) $\lambda=10^{-1}$. Observa-se que as seções de velocidade obtidas por $\lambda=10^2$ e 10^3 esses valores suavizam demasiadamente na direção horizontal, como ocorreu na regularização de ordem 1 com componente horizontal. Por outro lado, para valores menores que 10 o modelo de

velocidade é bem recuperado na sua composição estrutural, mas gerando estruturas entre a segunda e terceira camadas. Com o parâmetro $\lambda=10$ a velocidade é obtida com a menor distorção.

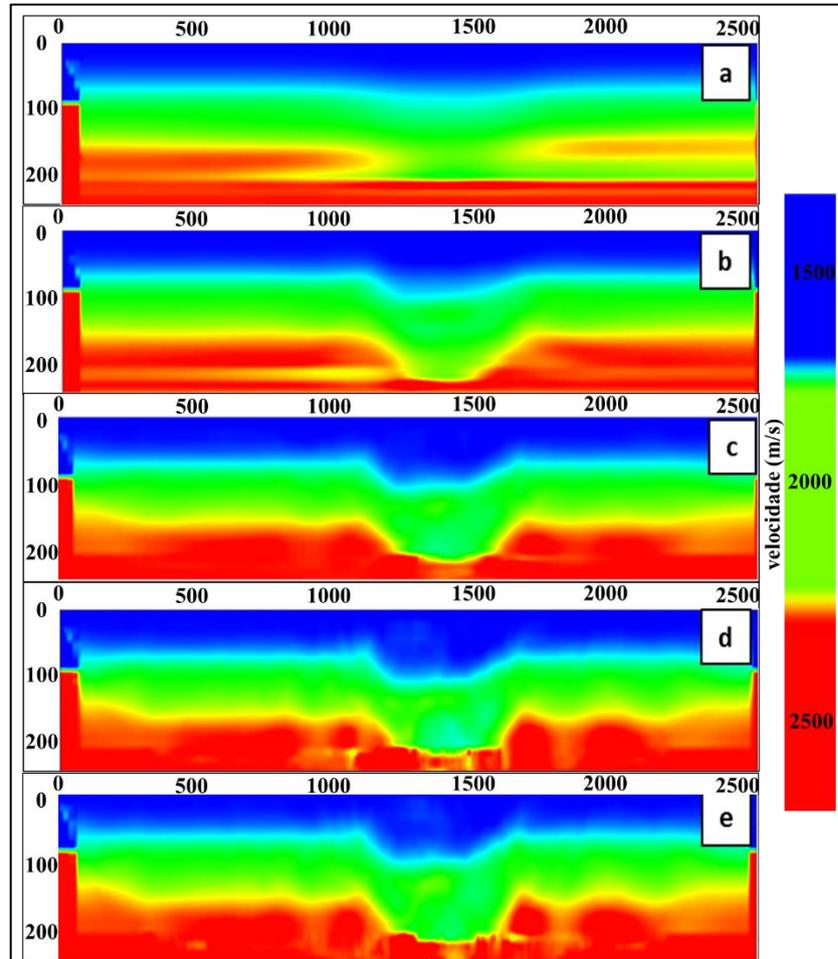


Figura 33: Resultado da tomografia usando regularização de Tikhonov de ordem 1 com esquema progressivo com os parâmetros (a) $\lambda=10^3$; (b) $\lambda=10^2$; (c) $\lambda=10^1$; (d) $\lambda=1$; (e) $\lambda=10^{-1}$.

3.3.1.4 Regularização de Tikhonov de ordem 2

A última abordagem adotada no estudo foi a regularização de Tikhonov de ordem 2. Esta regularização é segunda derivada do modelo nas direções espaciais (Equação 33) que reescrita na forma de diferenças finitas fica (Equação 50):

$$L^{(2)}m_s(x, z) = \frac{m_s(x + \Delta x, z) - 2m_s(x, z) + m_s(x - \Delta x, z)}{(\Delta x)^2} +$$

$$+ \frac{m_s(x,z+\Delta z) - 2m_s(x,z) + m_s(x,z-\Delta z)}{(\Delta z)^2} \quad \text{Eq. 50}$$

No Gráfico 15 é apresentado o resíduo do tempo de trânsito calculado em função da iteração para os parâmetros de regularização. Para $\lambda = 1000$ ocorre uma instabilidade numérica durante o processo tomográfico. Observa-se também que para os valores menores que 1000 o processo transcorre de modo suave sem variações bruscas e o resíduo converge para valores em torno de 6×10^{-7} .

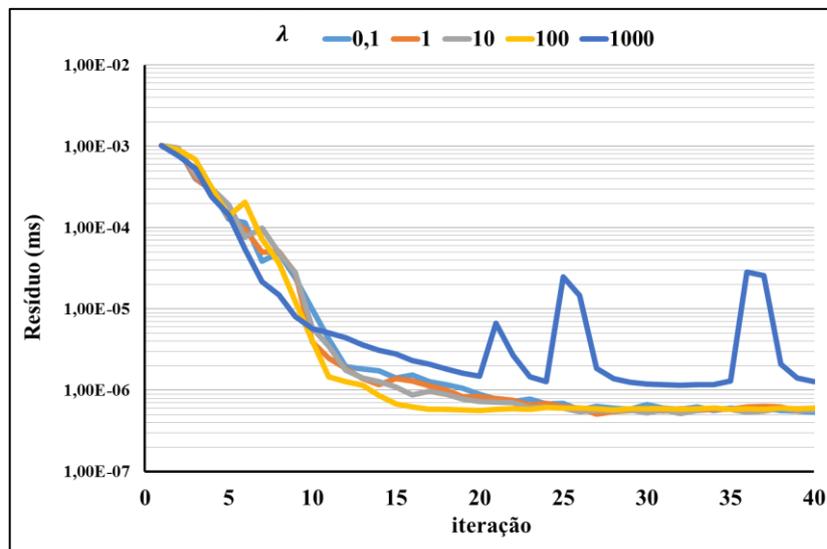


Gráfico 15: Evolução do resíduo do tempo de trânsito em função da iteração da tomografia usando regularização de Tikhonov de 2ª ordem.

No Gráfico 16 do resíduo em função do parâmetro de regularização observa-se que para valores do parâmetro λ menores ou igual a 100 o resíduo RMS do tempo de trânsito estão na mesma faixa de valores e que utilizando $\lambda=100$ os resíduos convergem mais rapidamente, pois os seus para cada iteração estão mais próximos quando comparados aos demais valores do parâmetro.

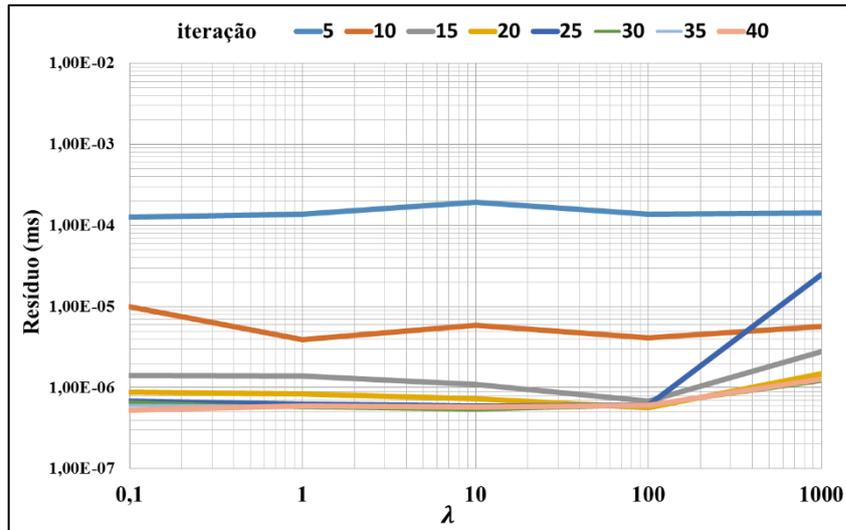


Gráfico 16: Resíduo RMS do tempo de trânsito em função do parâmetro de regularização de Tikhonov de 2ª ordem .

No Gráfico 17 é apresentado a evolução do número de elementos não-nulos da matriz tomográfica em função da iteração. A curva referente ao parâmetro $\lambda=10$ (cor cinza) que apresenta maior estabilidade numérica.

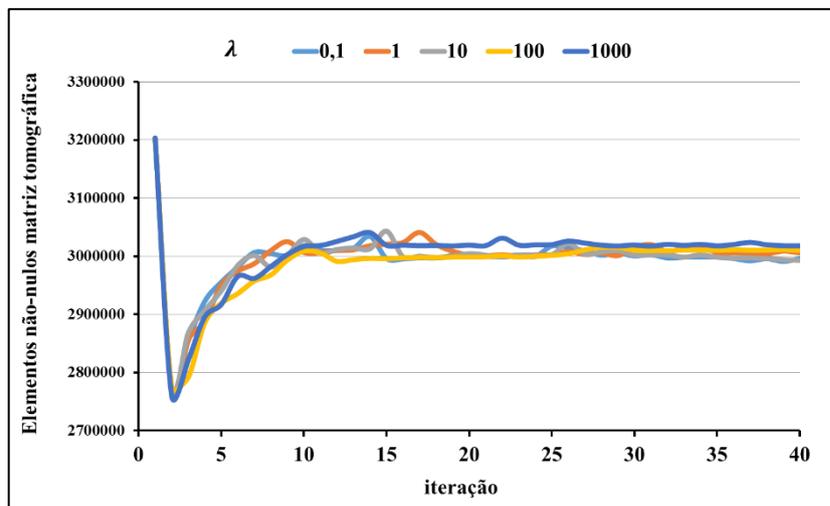


Gráfico 17: Número de elementos não-nulos da matriz tomográfica em função da iteração utilizando regularização de Tikhonov de 2ª ordem .

A Figura 34 apresenta o resultado da tomografia usando regularização de Tikhonov de ordem 2 usando os parâmetros (a) $\lambda=10^3$; (b) $\lambda=10^2$; (c) $\lambda=10^1$; (d) $\lambda=1$; (e) $\lambda=10^{-1}$. Observa-se que as seções de velocidade obtidas com $\lambda = 10^3$ suavizam demasiadamente na direção horizontal, como ocorreu na regularização de ordem 1 com componente horizontal. Por outro lado, para valores menores que 10 o modelo de velocidade é bem recuperado na sua

composição, mas gerando estruturas entre a segunda e terceira camadas. Com o parâmetro $\lambda=100$ a velocidade é obtida com a menor distorção.

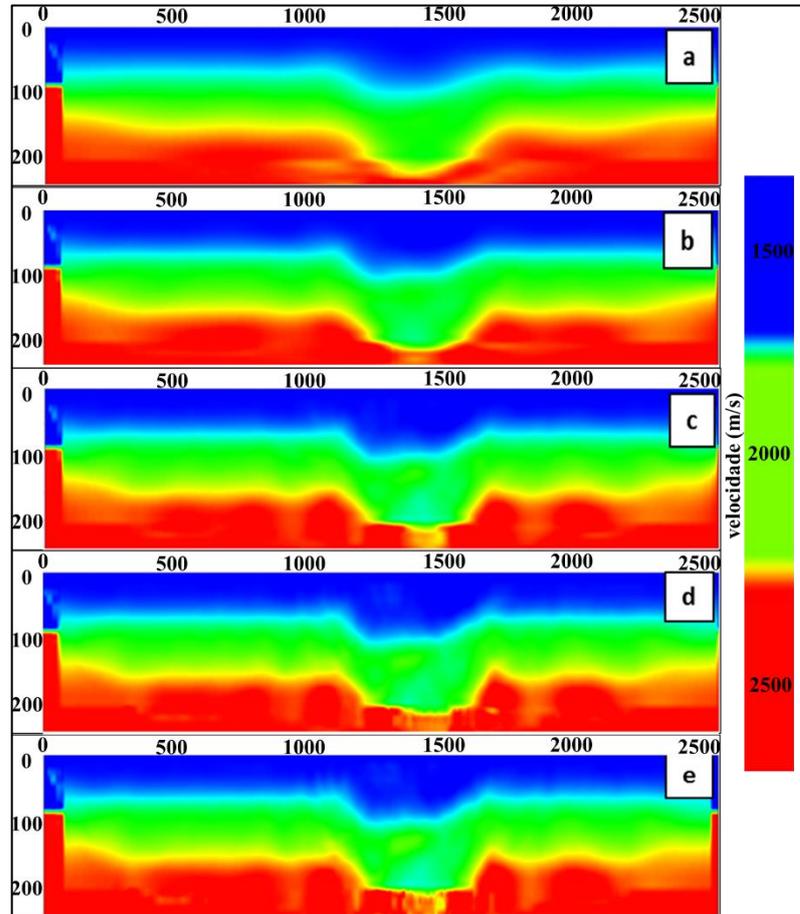


Figura 34: Seções de velocidade resultantes da tomografia com regularização de Tikhonov de 2ª ordem com o parâmetro (a) $\lambda=1000$, (b) $\lambda=100$, (c) $\lambda=10$, (d) $\lambda=1$ (e) $\lambda=0,1$.

3.3.1.5 Discussões sobre os cenários de regularização de Tikhonov

A obtenção dos valores ótimos para regularização não é trivial. Existem estratégias para serem modeladas, como a curva-L, mas sempre se recai na necessidade de rodar as inversões tomográficas e a partir dos resultados e observar o que melhor se ajusta. Em outras palavras, a curva-L não tem poder de previsibilidade. Cada problema físico apresentará um valor ótimo para o parâmetro de regularização de acordo a ordem de grandeza da propriedade modelada.

Entre os casos de regularização testados, os parâmetros λ ótimos para cada cenário localizam-se no vértice do gráfico do resíduo em função de λ e este valor ótimo para cada cenário. No Gráfico 18 está representado o resíduo dos tempos de trânsito em função dos parâmetros.

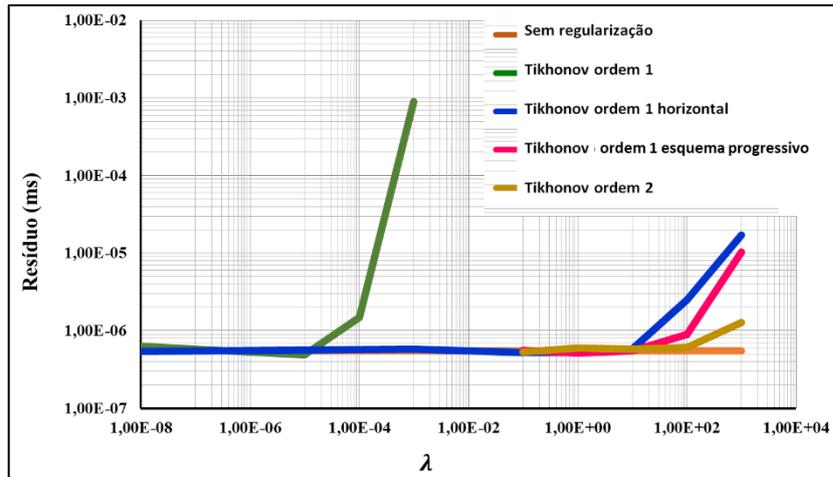


Gráfico 18: Resíduo RMS do tempo de trânsitos em função do parâmetro de regularização.

Fonte: Bulhões *et al.* (2019).

A variação do resíduo do tempo de trânsito em função da iteração é mostrada no Gráfico 19 para os casos sem regularização e os respectivos valores ótimos. A inversão tomográfica sem regularização converge após 28 iterações. Aplicando a regularização, a convergência do processo tomográfico ocorre na iteração 31 (primeira ordem), 25 (primeira ordem apenas componente horizontal), 28 (primeira ordem usando esquema progressivo) e 17 (segunda ordem).

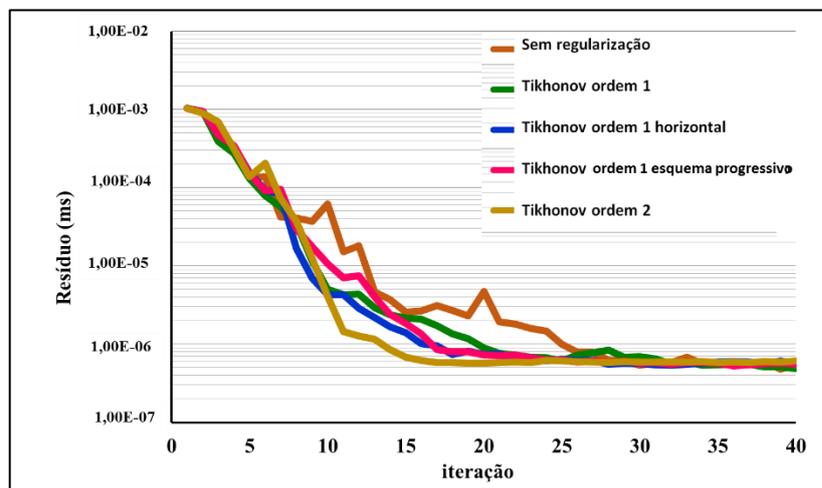


Gráfico 19: Resíduo RMS do tempo de trânsito em função da iteração para os casos com e sem regularização.

Fonte: Bulhões *et al.* (2019).

No aspecto de quantidade de elementos não-nulos da matriz tomográfica em função do parâmetro de regularização λ para cada caso de regularização de Tikhonov está representado

no Gráfico 20. Neste Gráfico observa-se que o ápice das curvas ocorre para os valores de λ ótimos da regularização.

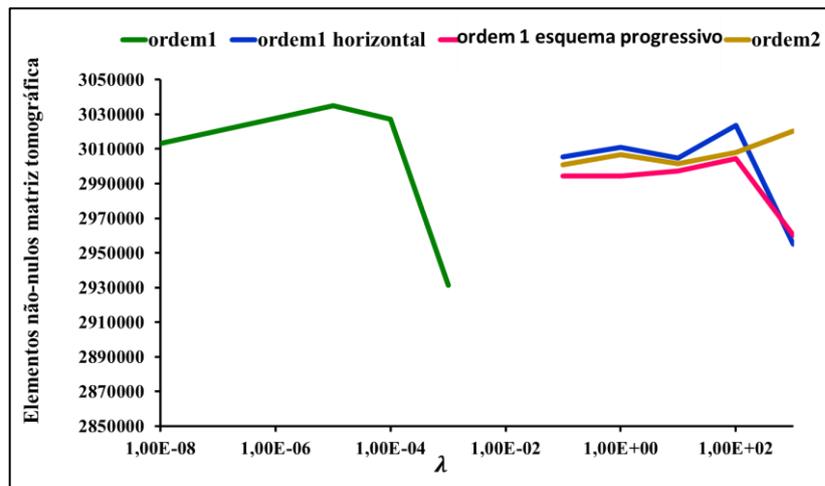


Gráfico 20: Quantidade de elementos não-nulos da matriz tomográfica em função do parâmetro de regularização para as regularizações de Tikhonov.

Na Figura 35 estão os modelos reais e as seções de velocidade obtidas pela inversão tomográfica sem aplicação da regularização e dos cenários que se utilizaram os valores ótimos de parametrização. Sem a aplicação da regularização as estruturas ficam distorcidas (Figura 35b). A mesma distorção é observada nos casos da tomografia aplicando a regularização de primeira ordem (Figura 35c). Por outro lado, nos casos de ordem 1 utilizando apenas a componente horizontal (Figura 35d), ordem 1 aplicando esquema progressivo (Figura 35e) e ordem 2 (Figura 35f) não apresentam distorção nas estruturas.

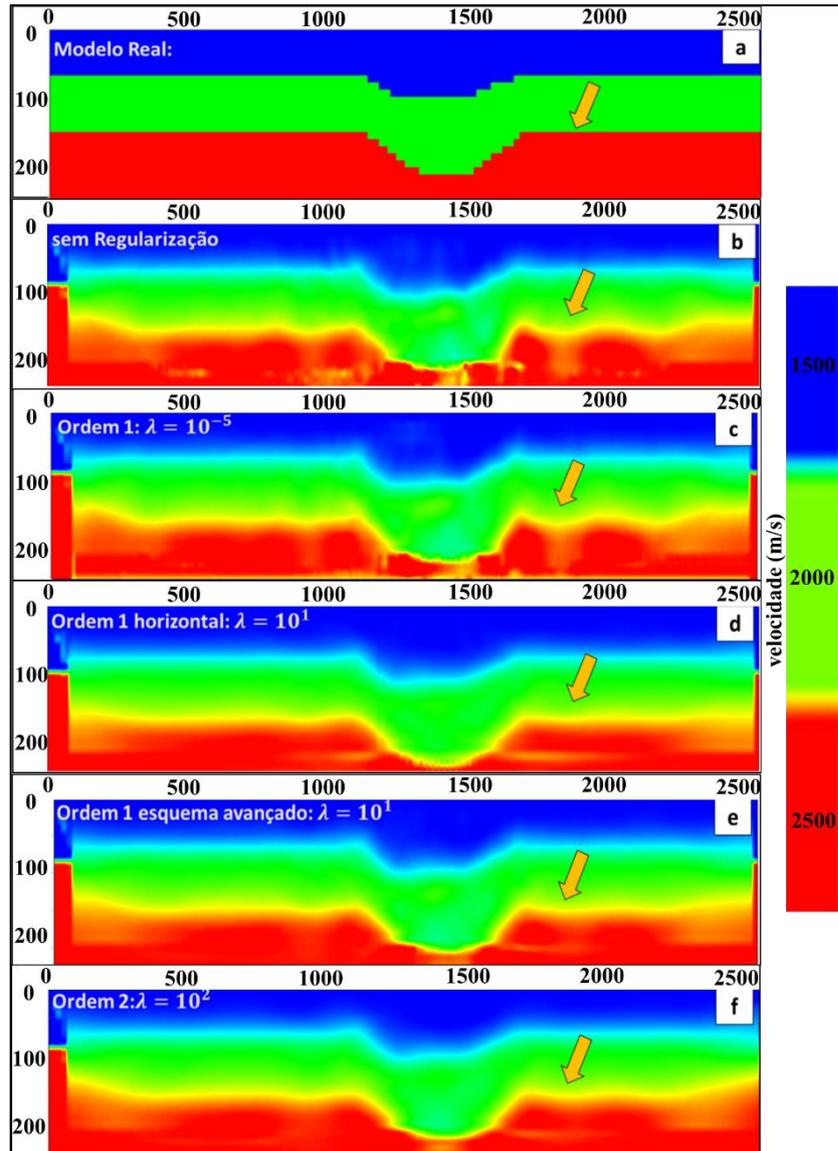


Figura 35: (a) Modelo real, (b) Tomografia sem regularização e Tikhonov (c) ordem 1, (d) ordem 1 componente horizontal, (e) ordem 1 esquema progressivo e (f) ordem 2.

Fonte: Bulhões *et al.* (2019).

Nas Figura 36, Figura 37, Figura 38 e Figura 39 estão representadas os perfis de velocidades intervalares e média das velocidades originais e obtidas pela tomografia na região do canal. Observa-se que a tomografia utilizando regularização de ordem 1 com apenas a componente horizontal (curva azul) apresenta resultados mais próximos a velocidade real (curva preta) na segunda camada.

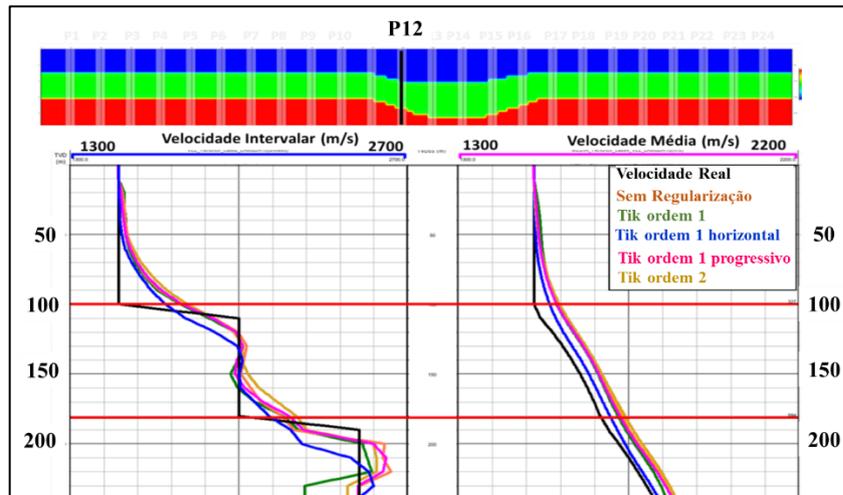


Figura 36: Seção vertical com as velocidades intervalares e média real e o resultado da tomografia para diferentes cenários de regularização.

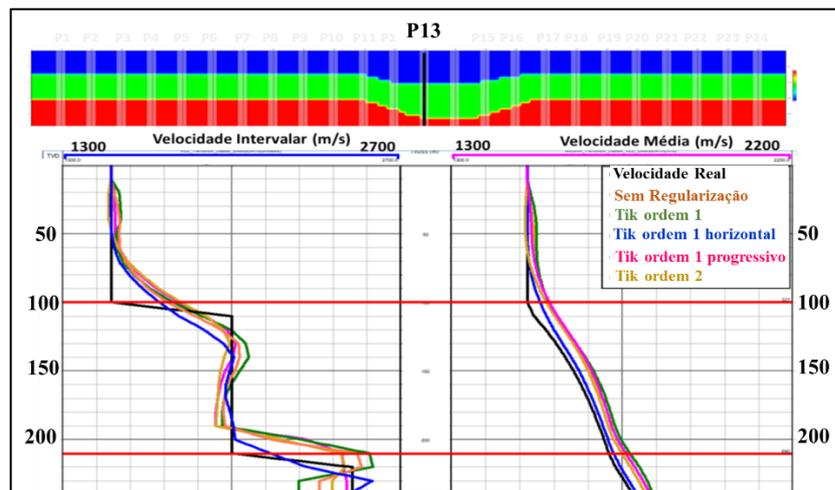


Figura 37: Seção vertical com as velocidades intervalares e média real e o resultado da tomografia para diferentes cenários de regularização.

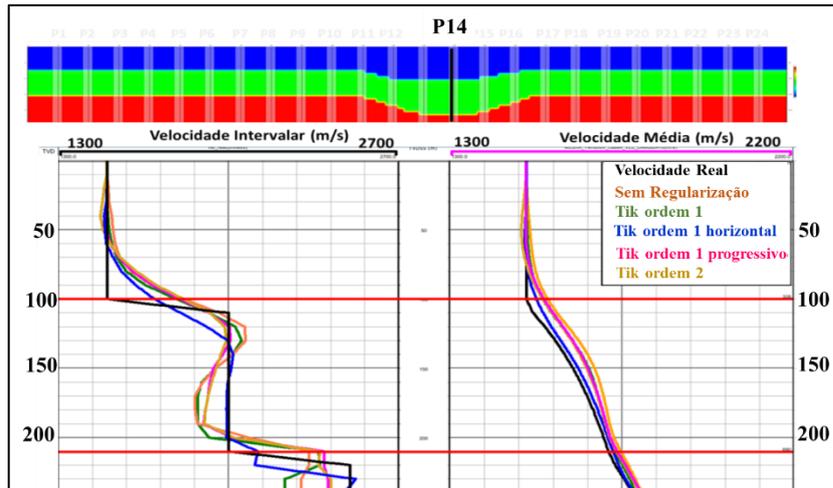


Figura 38: Seção vertical com as velocidades intervalares e média real e o resultado da tomografia para diferentes cenários de regularização.

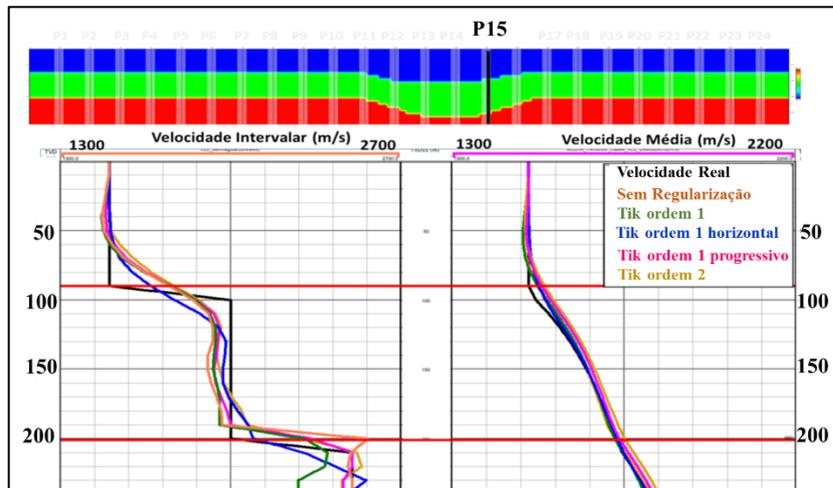


Figura 39: Seção vertical com as velocidades intervalares e média real e o resultado da tomografia para diferentes cenários de regularização.

Já nas Figura 40, Figura 41, Figura 42 e Figura 43 estão representadas as velocidades intervalares e médias para as profundidades de 40 m, 100 m, 120 m e 180 m respectivamente. Essas profundidades correspondem à mudança de velocidade, ou geologicamente representam mudança de litologia. Esta análise auxilia a compreensão do efeito da variação lateral de velocidade e conseqüentemente na conversão tempo-profundidade.

De forma geral, ocorrem variações em torno de 5% devido ao efeito da suavização do algoritmo tomográfico e dependendo da regularização esse efeito de suavização entre as camadas é maior. As maiores discrepâncias entre os valores estimados pela tomografia comparados ao modelo real encontram-se na região do canal entre a segunda e terceira camada.

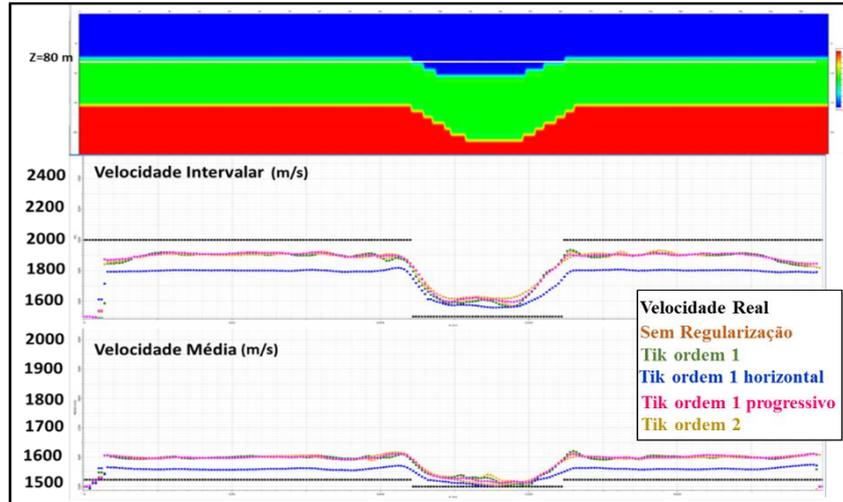


Figura 40: Seção horizontal com as velocidades intervalares e média real e o resultado da tomografia para diferentes cenários de regularização.

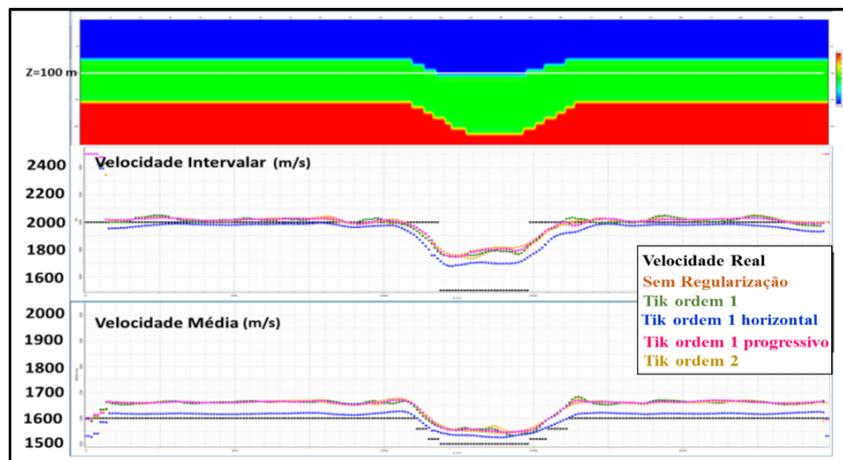


Figura 41: Seção horizontal com as velocidades intervalares e média real e o resultado da tomografia para diferentes cenários de regularização.

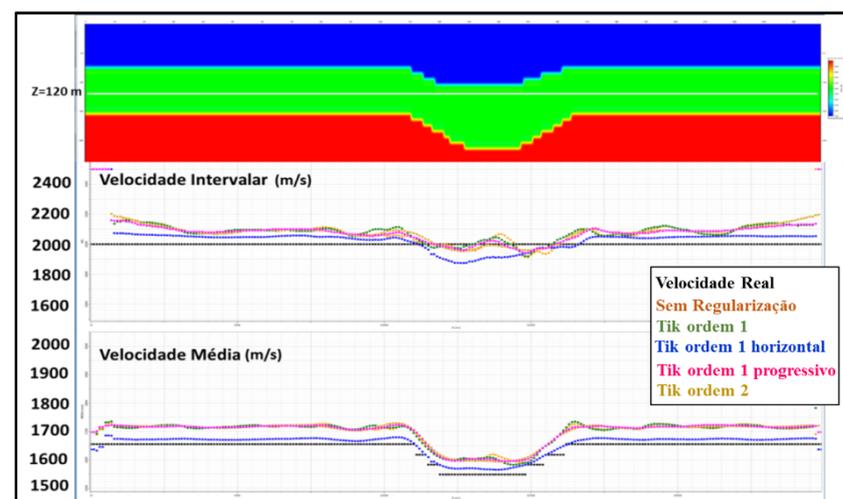


Figura 42: Seção horizontal com as velocidades intervalares e média real e o resultado da tomografia para diferentes cenários de regularização.

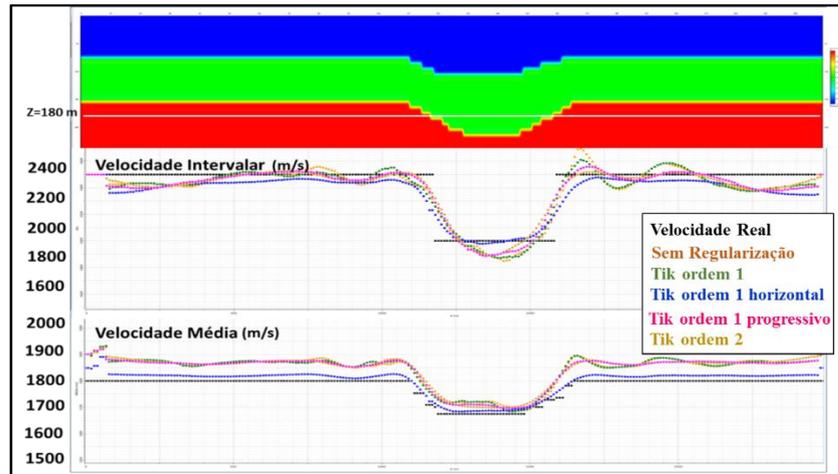


Figura 43: Seção horizontal com as velocidades intervalares e média real e o resultado da tomografia para diferentes cenários de regularização.

As diferenças entre as velocidades obtidas pela tomografia e o modelo real (Equação 51) estão representadas nos histogramas da Figura 44.

$$\delta V = V_{calc} - V_{real} \quad \text{Eq. 51}$$

Onde:

δV é a diferença entre o modelo calculado V_{calc} e o modelo real V_{real} .

Estão representadas os histogramas das diferenças δV para os casos sem regularização (Figura 44a) e os casos ótimos usando regularização de Tikhonov de ordem 1 (Figura 44b), ordem 1 componente horizontal (Figura 44c), ordem 1 esquema progressivo (Figura 44d) e ordem 2 (Figura 44e). Observa-se que a regularização de ordem 1 com apenas a componente horizontal apresentou maior quantidade de amostras em torno de zero da diferença dos demais tipos de regularização de Tikhonov testados.

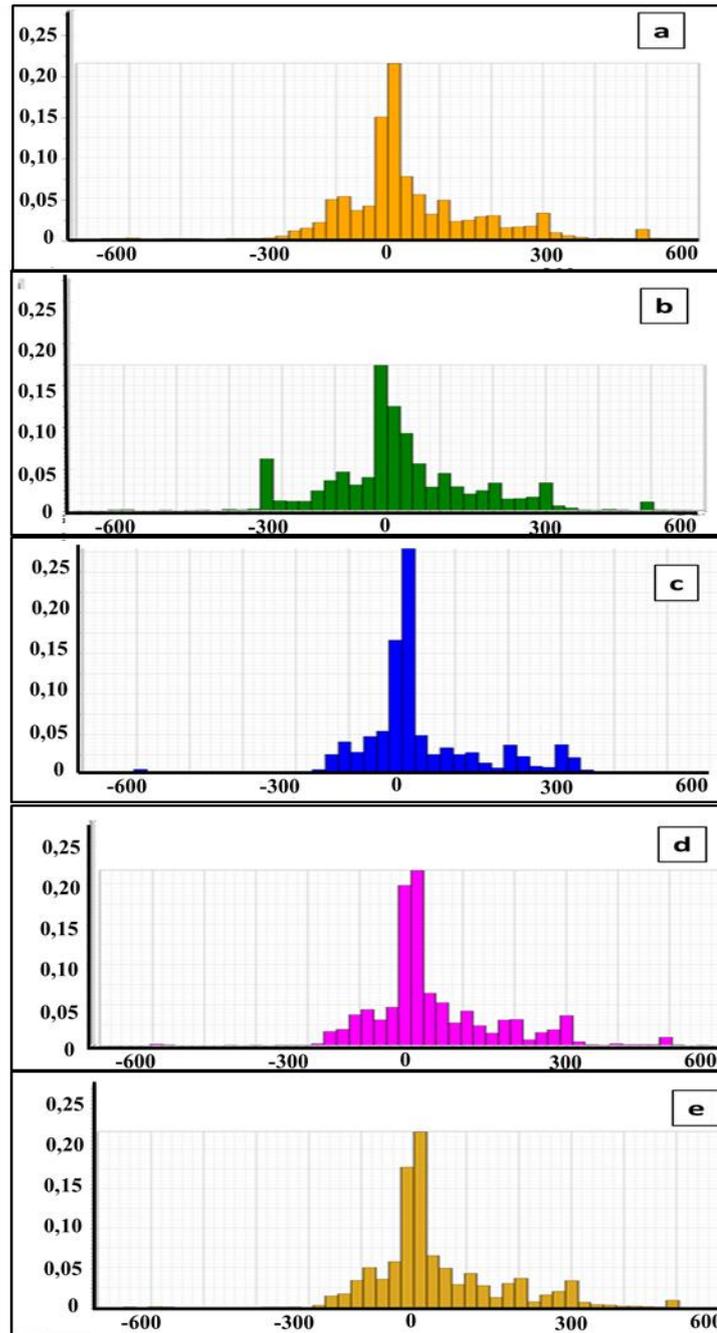


Figura 44: Histograma de δV para os casos (a) sem regularização e usando Tikhonov (b) ordem 1, (c) ordem 1 componente horizontal, (d) ordem 1 esquema progressivo e (e) ordem 2.

Uma análise complementar do erro RMS da velocidade para cada cenário de regularização de Tikhonov, no Gráfico 21 está representada essa diferença em função do parâmetro de regularização λ . Os vértices das curvas correspondem aos respectivos valores ótimos.

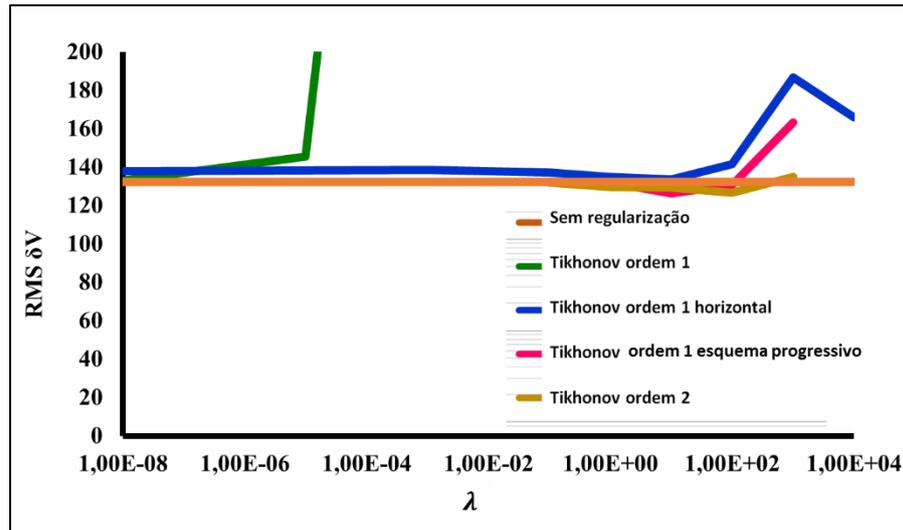


Gráfico 21: Erro RMS da velocidade calculada pela tomografia em função do parâmetro λ para os respectivos casos de regularização de Tikhonov utilizados.

Entre os modelos obtidos para os tipos de regularização de Tikhonov (Figura 35), o caso de ordem 2 apresentou um melhor resultado na recuperação de estruturas, além de ser o procedimento a convergir mais rápido (17 iterações). O melhor resultado obtido para esse cenário vai de encontro aos resultados obtidos nos trabalhos de Denisov *et al.* (2006) e Teimoornega e Porroohan (2010) para obtenção de imagens por Tikhonov de segunda ordem apresentar melhor delineação de feições do que Tikhonov de ordem 1.

3.3.2 Regularização de Berryman

O teste de sensibilidade dos parâmetros de regularização também foi aplicado ao proposto por Berryman (1991). A faixa de valores de parametrização fica entre -1 e 1. Os valores utilizados foram entre 10^{-8} e 10^{-1} . No Gráfico 22 está o resíduo RMS do tempo de trânsito em função da iteração para cada parâmetro de regularização λ . Para $\lambda = 10^{-1}$ o resíduo converge para valor alto e o modelo bem discrepante do real. Para $\lambda = 10^{-2}$ ocorre instabilidade numérica e até 40 iterações não ocorre convergência. Os valores de λ menores que 10^{-3} convergem para resíduos em torno de $6 \cdot 10^{-7}$. A convergência com maior velocidade (em menos iterações) ocorre para os valores 10^{-3} e 10^{-7} .

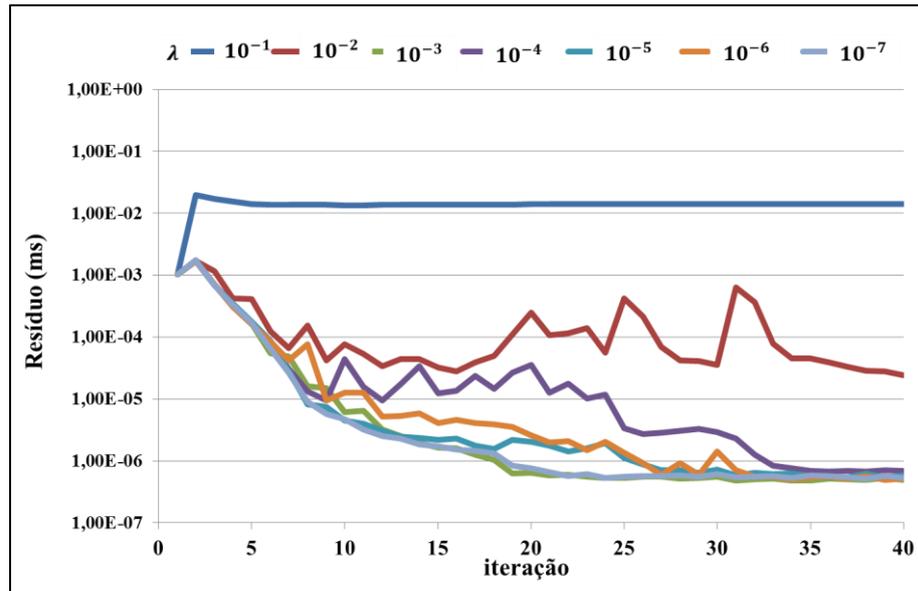


Gráfico 22: Gráfico da evolução do resíduo do tempo de trânsito em função da iteração da tomografia para os cenários de parâmetros de regularização de Berryman.

No Gráfico 23 estão representados a quantidade de elementos não-nulos da matriz sensibilidade para os diferentes valores de parâmetros λ de regularização de Berryman testados em função dos passos do processo tomográfico. Corroborando com o observado no Gráfico 22 (evolução do resíduo com a iteração), para $\lambda=10^{-1}$ destoa fortemente dos demais valores. Por outro lado, para $\lambda=10^{-3}$, a curva de forma mais suave, sem flutuações abruptas, indicando uma maior estabilidade na matriz \mathbf{G} e sua inversibilidade, implicando numa convergência em menor número de passos da tomografia.

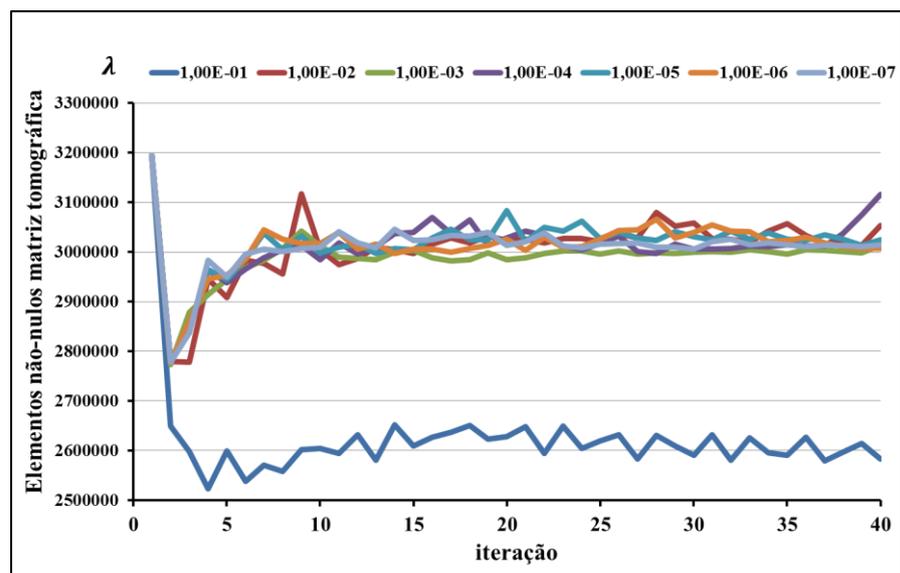


Gráfico 23: Evolução dos termos não-nulos da matriz tomográficas em função da iteração da inversão tomográfica para os cenários de parâmetro de regularização de Berryman.

No Gráfico 24 estão representados os resíduos RMS do tempo de trânsito em função do parâmetro de regularização λ e no Gráfico 25 o erro das velocidades resultantes da inversão tomográfica. Por estes gráficos é possível, de modo alternativo, a convergência do processo tomográfico em função do parâmetro de regularização λ . Para $\lambda=10^{-3}$ os resíduos estão bem mais próximos para as diferentes iterações, enquanto para os parâmetros $\lambda < 10^{-3}$ os resíduos levam mais iterações para ficarem com valores mais próximos na convergência.

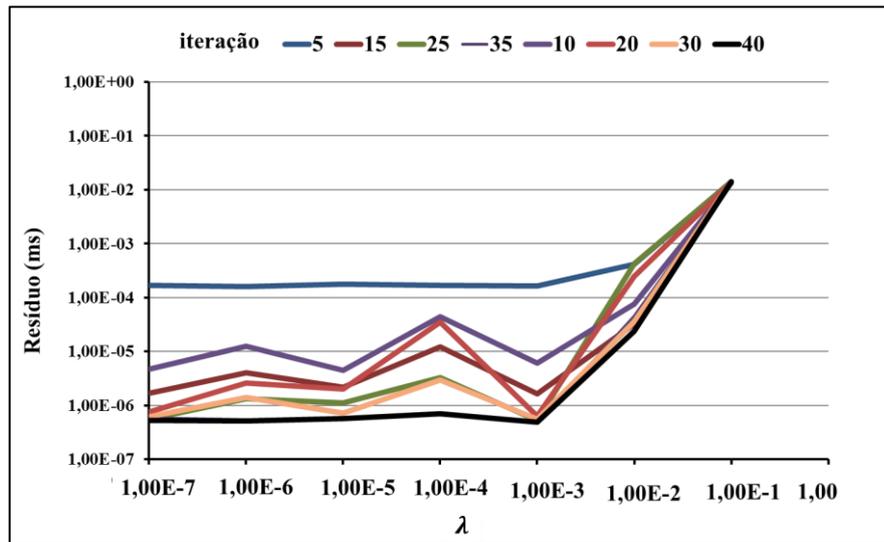


Gráfico 24: Resíduo RMS do tempo de trânsito em função do parâmetro λ de regularização de Berryman.

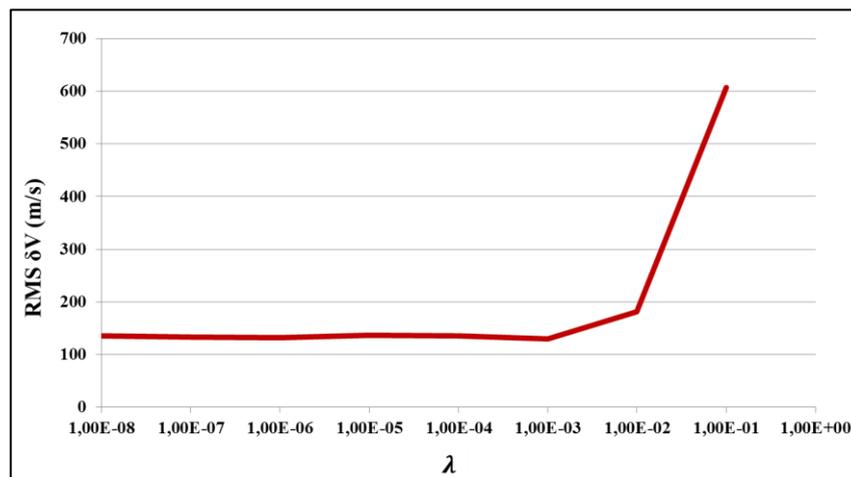


Gráfico 25: Gráfico do erro RMS das velocidades calculadas em função do parâmetro de regularização de Berryman.

A Figura 45 apresenta as seções 2-D com os modelos de velocidades obtidos pela inversão tomográfica com os diferentes valores de parametrização de Berryman. De encontro ao que se observou no Gráfico 25, as seções referentes aos parâmetros $\lambda = 10^{-1}$ e $\lambda = 10^{-2}$

convergem para modelos muito destoantes do real ou apresenta instabilidade numérica. Para valores menores ou iguais a 10^{-3} , ocorre convergência e os modelos obtidos apresentam grande similaridade com o modelo real. Por análise visual dos modelos obtidos, o parâmetro que resultou num modelo mais conforme ao real foi o 10^{-3} , onde o resultado apresentou menor distorção nas estruturas nas laterais do canal.

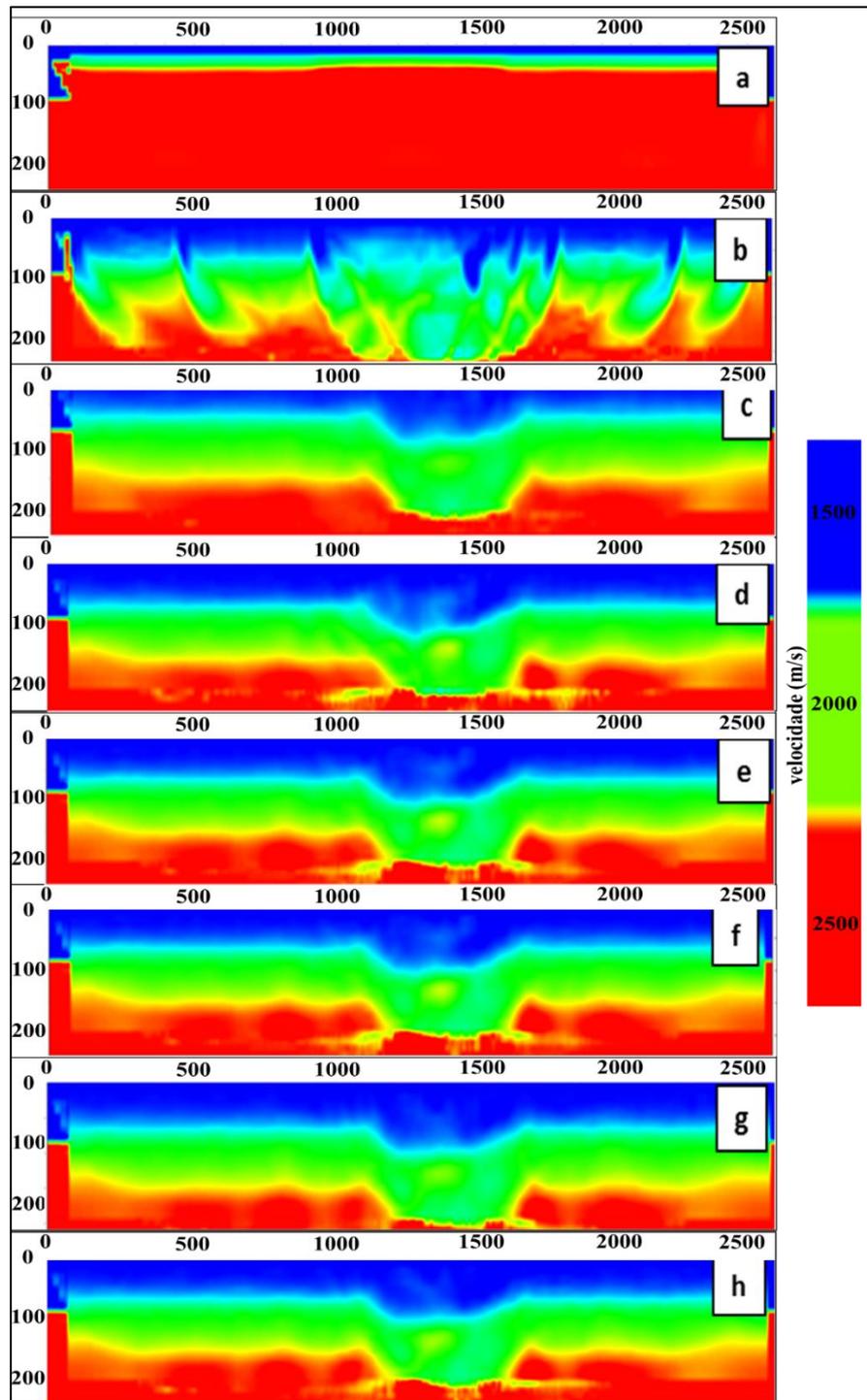


Figura 45: Seções de velocidade obtidas pela tomografia usando regularização de Berryman. (a) 10^{-1} , (b) 10^{-2} , (c) 10^{-3} , (d) 10^{-4} , (e) 10^{-5} , (f) 10^{-6} , (g) 10^{-7} , (h) 10^{-8} .

3.4 COMPARAÇÕES ENTRE AS REGULARIZAÇÕES DE TIKHONOV X BERRYMAN

De modo a avaliar qual estratégia de regularização da tomografia de regularização se apresentou mais eficaz, observaram-se os seguintes aspectos: (a) o valor de convergência do resíduo RMS do tempo de trânsito; (b) o número de iterações que ocorre a convergência e (c) o modelo resultante e a estrutura recuperada.

Parametrizando a tomografia de modo a calcular 40 iterações para cada caso ótimo, obteve-se o Gráfico 26 do resíduo RMS do tempo de trânsito em função da iteração e do tipo de regularização. A tomografia sem regularização convergiu a partir da 28ª iteração. Entre os casos ótimos da regularização de Tikhonov, a que se obteve convergência com menor número de iterações foi a de ordem 2 após 17 passos. A regularização por Berryman para o mesmo caso convergiu após 19 iterações.

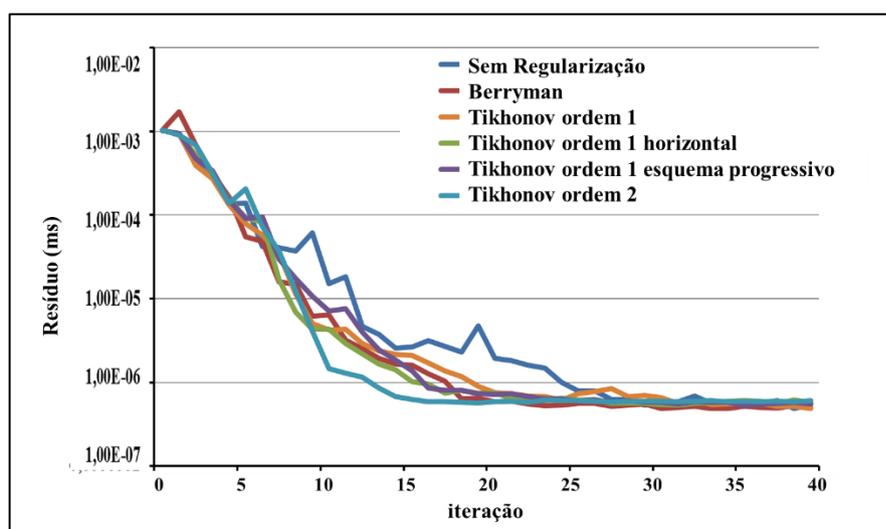


Gráfico 26: Gráfico do resíduo em função da iteração, sem regularização e com as regularizações de Tikhonov de ordem 1 e 2 e Berryman.

No Quadro 3 está o resumo das regularizações testadas e os respectivos resultados após as 40 iterações do processo tomográfico. Estão descritas no quadro: o valor ótimo do parâmetro λ de regularização de Tikhonov e Berryman (os parâmetros λ de Tikhonov e Berryman têm significados físicos diferentes); o passo em que inversão começa a convergir para o respectivo parâmetro λ , o resíduo RMS δt do tempo de trânsito comparado ao dado real; o erro RMS δV do modelo de velocidade comparado ao real; e o número de elementos não nulos da matriz \mathbf{G} (matriz tomográfica). A utilização das regularizações de Tikhonov de ordem 2 e Berryman convergem mais rápido o processo tomográfico a partir dos passos 17 e 19 respectivamente.

Por outro lado, o erro RMS δV da velocidade apresenta menores valores para as regularizações de Tikhonov ordem 1 com esquema progressivo (126,47 m/s) Tikhonov ordem 2 (126,87 m/s) e Berryman (129,17 m/s).

No caso da utilização da regularização de Tikhonov de ordem 1 convencional verifica-se que a sua utilização além de tornar o processo tomográfico mais lento para convergir comparado ao sem regularização, passando de 28 para 31 passos. Além disso, o erro RMS da velocidade calculada aumentou de 132,45 m/s para 145,58 m/s.

	λ ótimo	Início de convergência	RMS δt	RMS δV	Elementos não-nulos Matriz G
Sem regularização	-	28	5,47E-07	132,45	2989268
Tikhonov ordem 1	10^{-5}	31	4,88E-07	145,58	3025342
Tikhonov ordem 1 horizontal	10	22	5,76E-07	133,74	2995539
Tikhonov ordem 1 esquema progressivo	10	25	5,54E-07	126,47	3002633
Tikhonov ordem 2	100	17	6,06E-07	126,87	3010022
Berryman	10^{-3}	19	4,91E-07	129,17	3013414

Quadro 3: Resumo das regularizações aplicadas com as respectivas estatísticas sobre resíduo na 40ª iteração.

No Gráfico 27 estão a variação do número de elementos não-nulos da matriz de sensibilidade em função do passo da inversão tomográfica para os casos sem regularização (azul) e aplicando as regularizações de Berryman (vermelho) e Tikhonov ordem 2 (verde) para seus respectivos parâmetros ótimos. Observa-se que o processo tomográfico transcorre de forma mais suave nos casos de Berryman e Tikhonov ordem 2 a partir da iteração 9. Por outro lado, a inversão sem regularização apresenta maior flutuabilidade.

Na Figura 46 estão as seções dos modelos de velocidade resultantes da tomografia de refração utilizando os valores ótimos do parâmetro de regularização de Berryman (Figura 46a), Tikhonov ordem 1 componente horizontal (Figura 46b), Tikhonov ordem 1 com esquema progressivo (Figura 46c) e Tikhonov de ordem 2 (Figura 46d). Os quatro resultados apresentados são similares.

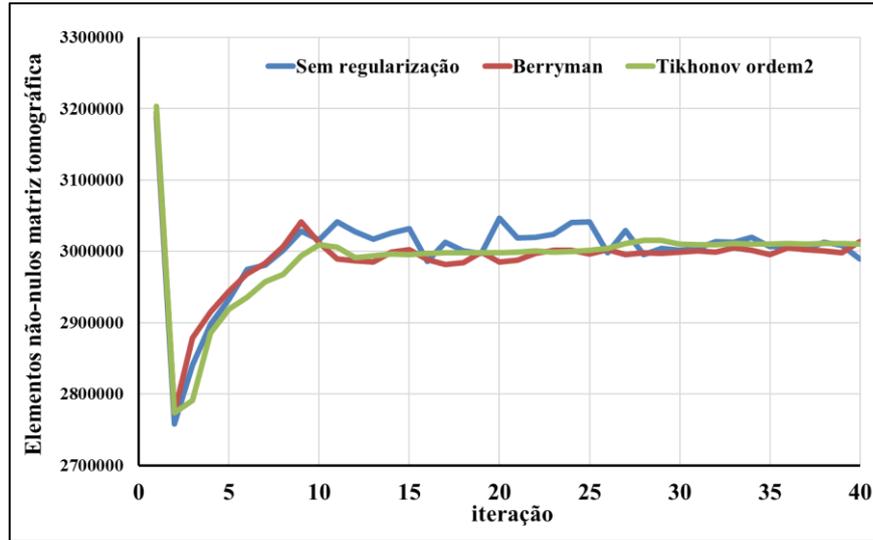


Gráfico 27: Elementos não-nulos da matriz tomográfica em função dos passos para os cenários sem regularização, utilizando Berryman e Tikhonov ordem 2.

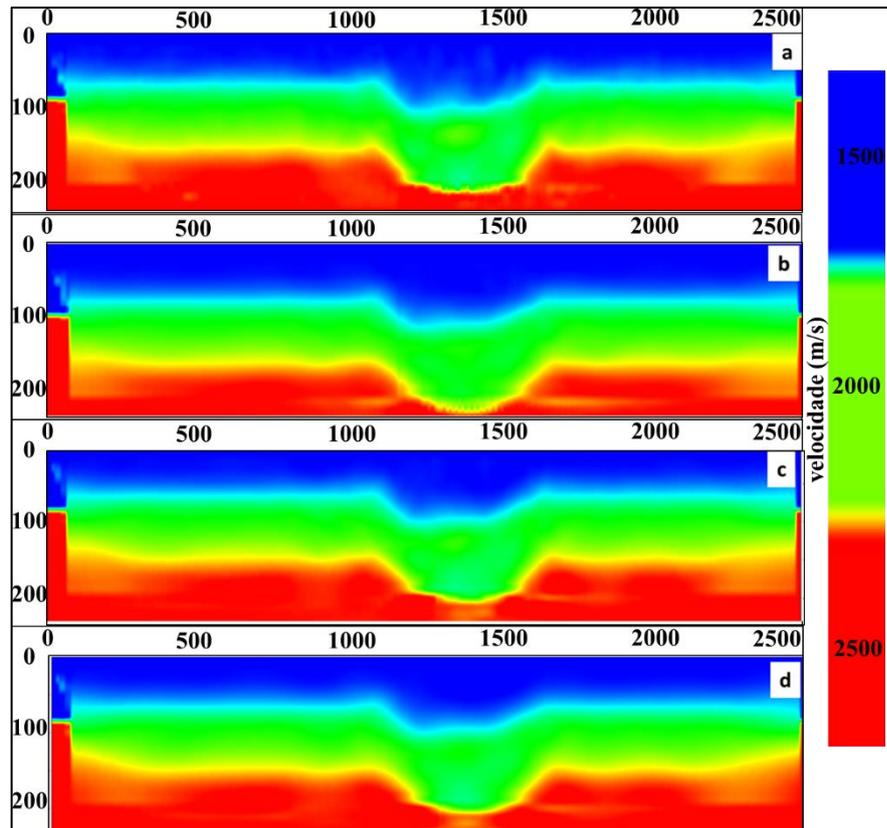


Figura 46: Seções de velocidade resultantes da tomografia com as regularizações (a) Berryman; (b) Tikhonov ordem 1 componente horizontal; (c) Tikhonov ordem 1 esquema progressivo e (d) Tikhonov ordem 2.

3.3.3. Comparação do tempo computacional dos estudos realizados

Utilizou-se para a avaliação das regularizações na inversão tomográfica um computador HP-Pavilion dv5, conforme descrição e apresentado na metodologia desse estudo. Desse modo, realizou-se um estudo para averiguação do tempo computacional médio para o processo tomográfico, onde se observou que o tempo decorrido entre a escrita do primeiro modelo gerado ocorreu após 40 iterações e com um tempo de aproximadamente 2 horas. É importante ressaltar que o objetivo inicial desse estudo não era de avaliar a performance computacional relativa as regularizações, sendo esse o motivo pelo qual não se utilizou uma máquina com maior potencial de processamento, sendo sugerido estudos futuros para uma análise aprofundada com esse foco.

O tempo médio para cada tipo de regularização está apresentado no Quadro 4, onde é exibido também os tipos de regularização correspondentes.

Inversão Tomográfica	Tempo Médio
Sem regularização	02 h 35 min 35 s
Tikhonov ordem 1	01 h 59 min 49 s
Tikhonov ordem 1 horizontal	01 h 59 min 05 s
Tikhonov 1 esquema progressivo	01 h 57 min 38 s
Tikhonov ordem 2	01 h 59 min 17 s
Berryman	02 h 00 min 23 s

Quadro 4: Tempo médio de processamento computacional para cada cenário de regularização.

4. CONCLUSÃO

O estudo objetivou avaliar o algoritmo de inversão tomográfica de refração em superfície rasa, assim como os efeitos da regularização na tomografia sísmica de refração e os efeitos dessa regularização nas velocidades sísmicas resultantes.

O algoritmo tomográfico foi testado preliminarmente por três modelos e apresentaram resultados robustos, realçando as principais feições estruturais tais como a representação do canal submarino. Observou-se que o caso da anomalia de baixa velocidade é um grande desafio para a tomografia de refração e o algoritmo conseguiu recuperar e representar a anomalia.

A análise realizada neste trabalho mostra como a utilização da regularização por si só não é suficiente para resolver os problemas mal-postos. A utilização dos tipos de regularização ou valores de parâmetros inadequados não acrescenta correção para o resultado da tomografia. Os resultados do estudo de sensibilidade para as regularizações de Tikhonov e Berryman mostraram que ocorreram distorções nas estruturas geológicas para uma faixa de valores de parâmetros de regularização não adequados.

O modelo de velocidade resultante da tomografia de refração usando a regularização de ordem 1 clássica (derivada nas direções x e z) não resolveu os problemas existentes no caso sem regularização e apresentaram uma grande instabilidade numérica.

A aplicação da regularização de ordem 1 com derivada na direção horizontal resultou em modelos de velocidade com valores mais próximos ao modelo real e menores distorções estruturais que o de ordem 1 clássica. Assim, o valor do parâmetro de Tikhonov que melhor estabilizou a inversão tomográfica e minimizou as distorções estruturais no modelo foi $\lambda=10$. Já a regularização de Tikhonov de ordem 1 com esquema progressivo apresentou resultados similares ao de ordem 1 da componente horizontal. Desse modo, o valor ótimo para estabilidade numérica e melhor obtenção estrutural foi $\lambda=10$.

Observa-se que a tomografia de refração utilizando a regularização de Tikhonov de ordem 2 converge mais rápido que os demais casos, com 17 iterações, sendo o valor $\lambda=100$ o que resultou no modelo de velocidade com menores distorções estruturais. Embora o cenário de ordem 1 com derivada horizontal ter apresentado o melhor resultado para os modelos, a sua convergência foi muito lenta ocorrendo apenas após 28 iterações.

A convergência é um fator determinante nos processos tomográficos que apresentam resultados similares, porém diferenciando no grau de suavização. Isso ocorre simultaneamente com os objetivos da tomografia sísmica, que é o aprimoramento do processamento sísmico em

relação ao modelo inicial. Além de ser a entrada para os algoritmos de imageamento sísmico e FWI.

Dentre os quatro cenários de aplicação da regularização de Tikhonov, os melhores resultados e foram similares: ordem 2, ordem 1 componente horizontal e ordem 1 esquema progressivo. Isso é um fator importante para a velocidade na convergência, pois na indústria de óleo e gás o tamanho dos dados sísmicos é cada vez maior e o tempo de processamento é uma variável fundamental. No caso de ordem 2 a convergência foi melhor (em menor número de iterações) e com o segundo menor erro de RMS obtido na velocidade obtida (126,87 m/s). O melhor resultado observado para regularização Tikhonov de ordem 2 comparada as ordens inferiores corrobora resultados obtidos por Denisov *et al.* (2006) e Teimoornega e Poroohan (2010) para obtenção de imagens usando regularizadores de Tikhonov de segunda ordem apresentar melhor delineação de feições do que Tikhonov de ordem 1.

A regularização de Berryman aplicada neste trabalho apresentou uma eficiência computacional superior as regularizações de Tikhonov de ordem 1 e equivalente ao Tikhonov de ordem 2. Essa conclusão reforça que a proposta de Berryman não é apenas um regularizador, mas também um pré-condicionador. O modelo de velocidade resultante apresentou resultado equivalente, sem distorções estruturais e o resíduo do tempo de trânsito calculado foi menor do que o obtido usando Tikhonov de ordem 2.

Sugere-se como perspectivas para trabalhos futuros:

1. Testar outras regularizações para a tomografia de refração, a fim de avaliar a eficiências destas, principalmente a *Total Variation* e *Total Variation Modificada*.
2. Implementar a tomografia com a otimização de outras funções erro.
3. Testar o quão eficiente são os modelos obtidos pela tomografia de refração como modelos iniciais para o *Full Waveform Inversion* (FWI).
4. Aplicação do programa de inversão tomográfica em dados reais de ambientes terrestres (projeto Volta Redonda) e marinho raso.
5. Fazer avaliação do tempo de processamento computacional para os diferentes cenários de regularização.

REFERÊNCIAS

- ACAR, R. e VOGEL, C. R. *Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems. Inverse problems*, v.10 n. 6, p.874–887, 1994. Disponível em: < <https://www.math.ucla.edu/~lvese/285j.1.09f/AcarVogel.pdf> >
- ALMEIDA, V. T. X. **Tomografia sísmica de superfície: modelagem direta calculando as trajetórias de ondas refratadas**. 2013. 98 f. Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Instituto de Geociências, Universidade Federal Fluminense, Niterói.
- AMORIM, W. D.; HUBRAL, P. e TYGEL, M. *Computing field statics with the help of seismic tomography. Geophysical Prospecting*. v. 35, n. 8, p. 907–919, out. 1987. ISSN 1365-2478. Disponível em: < <http://dx.doi.org/10.1111-j.1365-2478.1987.tb00849.x> >.
- ALFORD, R.M.; KELLY, K.R. e BOORE, D.M. *Accuracy of finite difference modelling of the acoustic wave equation. Geophysics*, v. 39, n.6, p. 834–842, 1974. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.870.3092&rep=rep1&type=pdf>>
- ASTER, R. C.; BORCHERS, B. e THURBER, C. H. **Parameter Estimation and Inverse Problems**. [S.l.]: Elsevier Academic Press, 2005. 320 p.
- BAHIA, B. F. **Otimizando a Migração por Mínimos Quadrados através de Operadores Adjuntos**. 2016. 89 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Geofísica) - Instituto de Geociências, Universidade Federal da Bahia, Salvador.
- BAO, H.; BIELAK, J.; GHATTAS, O.; KALLIVOKAS, L.F.; O'HALLARON, D.R.; SHEWCHUK, J.R. e XU, J., 1998. *Large-scale simulation of elastic wave propagation in heterogeneous media on parallel computers. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 152, p. 85–102, 1998. Disponível em <<https://people.eecs.berkeley.edu/~jrs/papers/cmame.pdf>>
- BERRYMAN, J. G., *Weighted least-squares criteria for seismic traveltime tomography, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 27, p. 302-309, 1989.
- BERRYMAN, J. G. *Lectures Notes on Nonlinear Inversion and Tomography. Lecture notes from MIT*, 1991.
- BOUCHON, M. e SANCHEZ-SESMA, F.J. *Boundary integral equations and boundary elements methods in elastodynamics, Advances in Geophysics*, v. 48 n.06, p. 157–189, 2007. Disponível em < [https://doi.org/10.1016/S0065-2687\(06\)48003-1](https://doi.org/10.1016/S0065-2687(06)48003-1) >

- BULHÕES, F.C.; ALMEIDA, V.T.X.; CETALE SANTOS, M.A.; SANTOS, L.A. Efeitos de regularização para tomografia de refração sísmica marinha rasa 2D. *In: Anais do II Simpósio Brasileiro de Geologia e Geofísica Marinha*, Porto Alegre, p. 377-378, 2019. Disponível em: < https://storage.googleapis.com/wzukusers/user-31897907/documents/5e0635b83b79esNwP8V6/Anais_II_SBGGM_PGGM_rev_271219.pdf >
- BULHÕES, F.C.; AMORIM, G.A.S.; BRUNO, V.L.V.R.; FERREIRA, G.D.; PEREIRA, E.S. e CASTRO, R.F. Fluxo para Construção do Modelo de Velocidade Regional da Bacia de Campos. *In: Anais do VI Simpósio Brasileiro de Geofísica*. Porto Alegre. 2014. Disponível em < https://sbgf.org.br/mysbgf/eventos/expanded_abstracts/VI_SimBGf/Fluxo%20para%20Constru%C3%A7%C3%A3o%20do%20Modelo%20de%20Velocidade%20Regional%20da%20Bacia%20de%20Campos.pdf >
- BULHÕES, F. C.; FERREIRA, G. D. e CAPARICA JR., J. F. *Impacts of Seismic Velocity Model Calibration for Time-Depth Conversion: A Case Study*. **Revista Brasileira de Geofísica** v. 36, n. 4, 2018. Sociedade Brasileira de Geofísica ISSN 0102-261X. Disponível em < <http://dx.doi.org/10.22564/rbgf.v36i4.1965> >
- CAPUCCI, F. V. **Tomografia Sísmica por Tempos de Trânsito Poço-à-Poço**. 2013. 79 f. Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Instituto de Geociências, Universidade Federal Fluminense, Niterói.
- CARBONESI, B. L. **Tomografia de Refração e sua Aplicação na Identificação dos Altos Estruturais do Gráben da Casa de Pedra, RJ**. 2018. 120 f. Projeto Final (Bacharel em Geofísica) – Instituto de Geociências, Universidade Federal Fluminense, Niterói.
- CARCIONE, J. 1994. *The wave equation in generalized coordinates*. **Geophysics** v. 59, n.12, p. 1911–1919, 1994.
- CAVACUNDO, O. B. M. D. **Tomografia de Refração Sísmica e de Resistividade Elétrica Aplicadas à Estimativa e Caracterização de Volumes de Sedimentos Contaminados por Metais Pesados. O Caso do Córrego Consciência**. 2015. 93 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Évora, Évora.
- CERVENY, V. *Seismic Ray Theory*. Cambridge Univ. Press, 2001.
- CHAI, L.; TONG, P. e YANG, X. *Frozen Gaussian approximation for 3-D seismic wave propagation*. **Geophysical Journal International**, v. 216, n.2, p. 1394-1412, 2017. Disponível em: < <https://doi.org/10.1093/gji/ggy498> >
- CLAERBOUT, J. F.; MUIR, F. *Robust modeling with erratic data*. **Geophysics**, Society of Exploration Geophysicists, v. 38, n. 5, p. 826–844, 1973.

- CUTLER, R.; BISHOP, T. N., H.; WYLD, W.; SHUEY, R. T.; KROEGER, R. A.; JONES, R. C. e RATHBUN, M. L. *Seismic tomography: Formulation and methodology*. In: **SEG Technical Program Expanded Abstracts**. Society of Exploration Geophysicists, p. 711-712, 1984.
- DENISOV, A. M.; KRYLOV, A.S. e TSIBANOV, V. N. *Second Order Tikhonov Regularization Method for Image Filtering*. In: **International Conference Graphicon** 2006, Novosibirsk Akademgorodok, Russia, <http://www.graphicon.ru>
- DOBECKI, T.L. e ROMIG, P.R. *Geotechnical and groundwater geophysics: Geophysics*, v. 50, n. 12, p. 2621-2636. 1985.
- ENGQUIST, B. e RUNBORG, O., 2003. *Computational high frequency wave propagation*, *Acta Numerica*, v. 12, p. 181-266, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0962492902000119>>
- FERNANDES, L. F. **O sal estratificado e sua importância na modelagem de velocidades para fins de migração sísmica**. 2017. 92 f. Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Instituto de Geociências, Universidade Federal Fluminense, Niterói.
- FRAGA, T. F. **Ensaio sísmicos na região de Termas de Ibirá/SP com emprego dos métodos de tomografia sísmica de ondas P e de análise multicanal de ondas Rayleigh**. 2016. 104 f. Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Instituto de Geociências, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- GRAVES, R.W. *Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences*, *Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite difference.*, v. 86, p. 1091–1106, 1996.
- HADAMARD, J. *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*. *Princeton University Bulletin*. 1902. s.n. p. 49–52.
- HAMPSON, D.; RUSSEL, B. *First-break interpretation using generalized linear inversion*. *Journal of the Canadian Society of Exploration Geophysicists*, v. 20, n. 1, p. 40–54, 1984. Disponível em: <[http://209.91.124.56/publications-/journal/198412/1984_Hampson D first break interp.pdf](http://209.91.124.56/publications-/journal/198412/1984_Hampson_D_first_break_interp.pdf)>.
- HILL, N. R. *Downward continuation of refracted arrivals to determine shallow structure*. *Geophysics*, v. 52, p. 1188-1198, 1987.
- IVANOV, J.; MILLER, R.; XIA, J.; STEEPLES, D. e PARK, C. *Joint analysis of refractions with surface waves: An inverse solution to the refraction-traveltime problem*. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 71, n. 6, p. R131–R138, 2005a. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.2360226>>.

- IVANOV, J.; MILLER, R. D.; XIA, J.; STEEPLES, D. e PARK, C. B. *The inverse problem of refraction travel times, part I: Types of geophysical nonuniqueness through minimization. Pure and Applied Geophysics*,. Birkhäuser-Verlag, v. 162, n. 3, p. 447–459–, 2005b. ISSN 0033-4553. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00024-004-2615-1>>.
- JIANG, W. E ZHANG, J. *First-arrival travelttime tomography with modified total-variation Regularization. Geophysical Prospecting*, v. 65, n. 5, 2016. Disponível em <<https://doi.org/10.1111/1365-2478.12477> >
- KAMINSKY, A. *Zond Software Packge*. Disponível em <http://zond-geo.com/english>
Acessado em 15 de outubro de 2019.
- KOLSLOFF, D. e BAYSAL, E. *Forward modelling by a Fourier method, Geophysics*, v. 56, p. 231–241, 1982.
- KOMATITSCH, D. e TROMP, J. *Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation, Geophys. J. Int.*, v. 139, n.3, p. 806–822, 1999.
- KOMATITSCH, D., TSUBOI, S. e TROMP, J. *The spectral-element method in seismology, in Seismic Earth: Array Analysis of Broadband Seismograms. Geophysical monograph* v. 157, p. 205–228, 2005. eds Levander, A. & Nolet, G., AGU.
- LANKSTON, R. W. *The seismic refraction method: a viable tool for mapping shallow targets into the 1990s, Geophysic* v.5, n. 54, p. 1535-1542, 1989.
- LINES, L. e NEWRICK, R. *Fundamentals of Geophysical Interpretation*. Primeira edição. *Society of Exploration Geophysicists*, 2004. 288 p. ISSN 978-1-56080-125-2. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.9781560801726>>.
- MARSHALL, S. T. *Introduction to Geophysics. Department of Geological and Environmental Sciences Appalachian State University*. 2014. Disponível em <<https://www.appstate.edu/~marshallst/GLY3160/> >
- MAUL, A., FEILHABER, M. & GONÇALVES, P.A. *Modelagem Geológica de Velocidades Sísmicas Utilizando o GoCad*. (Apostila Interna Petrobras). 2005.
- MENKE, W. *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*. Edição revista. [S.l.]: Academic Press Elsevier, 1989. 289 p.
- MENKE W. *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*, 3rd ed., Academic Press, Orlando, FL, 293 pp. 2012.

MUNIZ, W. B. **Um Problema Inverso em Condução do Calor utilizando Métodos de Regularização**. 1999. 79 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Instituto de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre.

NEMETH, T.; WU, C. e SCHUSTER, G. T. *Least-squares migration of incomplete reflection data*. *Geophysics*, v. 64 n.1, p. 208–221, 1999.

OLSEN, K.B. e ARCHULETA, R.J. *3-D simulation of earthquakes on the Los Angeles fault system*, *Bulletin of the Seismological Society of America* v. 86, n.3, p. 575–596, 1996.

OSYPOV, K. *Refraction tomography without ray tracing*. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. SEG, v. 18, n. 1, p. 1283–1286, 1999. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?SGA/18/1283/1>>.

PALMER, D. *The generalized reciprocal method of seismic refraction interpretation*, SEG. 1980.

PODVIN, P.; LECOMTE, I. *Finite difference computation of travel times in very contrasted velocity models: a massively parallel approach and its associated tools*. *Geophysical Journal International*, v. 105, p. 271–284., 1991.

POPOV, M.M. *Ray Theory and Gaussian Beam Method for Geophysicists*, 2002. EDUFBA.

QUIROZ, J. R. 2014. **Métodos de Quadrados Mínimos Totais Regularizados**. 2014. 86 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Centro de Ciências Físicas e Matemáticas – Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis.

RUDIN L. I; OSHER S. e FATEMI E. *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*. *Physica D: Nonlinear Phenomena* v. 60, n. 1, p. 259–268, 1992.

SANCEVERO, S. S.; REMACRE, A. Z. e PORTUGAL, R. S. O papel da inversão para a impedância acústica no processo de caracterização sísmica de reservatórios. **Revista Brasileira de Geofísica**, São Paulo, v. 24, n. 4, p. 495-512, 2006. Disponível em <<https://doi.org/10.1590/S0102-261X2006000400004>>

SANTOS, L. A. **Inversão tomográfica sequencial para o campo de velocidades sísmicas baseada em difrações e critérios geológicos**. 2012. 150 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil). COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

SCOPUS. **Estatística das publicações referentes às sísmicas de reflexão e refração, regularização e tipos de regularização**. Disponível em <https://www.scopus.com/sources>. Consultado em 21-jan-2020.

- SIGLOCH, K. **Notas de aula sobre Sísmica de Refração**. Universidade de Oxford. 2015. Disponível em < http://www.earth.ox.ac.uk/~karins/tmp/Lectures7-8_Seismic_Refractions_2015-05-07.ppt.pdf >. Consultado em 29-jan-2020.
- SHERIFF, R. E. *Exploration Seismology*. Segunda edição. Nova York, EUA: Cambridge University Press, 628 p., 1995.
- STANTON, A. *Least squares pre-stack time migration for imaging and reconstruction of converted waves*. **GeoConvention 2014: FOCUS**. 2014.
- STEFANI, J. *Turning ray tomography*. **Geophysics**, v. 60, n. 6, p. 1917–1929, 1995. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.1443923>>.
- TAILLANDIER, C.; DELADERRIÈRE, N.; THEROND, A. e MEUR, D. L. *First arrival travelttime tomography - when simpler is better*. **In: 73rd EAGE Conference & Exhibition, , Extended abstract**, 2011. Disponível em: <<http://earthdoc.eage.org/publication/publicationdetails/?publication=50466>>.
- TELFORD, W. M.; GELDART, L. P. e SHERIFF, R. E. *Applied Geophysics*. Segunda edição. Nova York, EUA: Cambridge University Press, 792 p. 1995.
- TEIMOORNEGA, K. e POROOHAN, N. *The Application of Discrete Tikhonov Regularization. Inverse Problem in Seismic Tomography*. **Water & Geoscience Proceedings of the 4th IASME/WSEAS. International Conference on GEOLOGY and SEISMOLOGY**. University of Cambridge, 2010.
- TIKHONOV, A. N. e V. Y. ARSENIN, V. Y. *Solutions of Ill-Posed Problems*, 1977, New York, Winston.
- TROMP, J., KOMATITSCH, J. e LIU, Q. *Spectral-element and adjoint methods in seismology*, **Communications In Computational Physics**, v. 3, p. 1–32, 2008.
- VELHO, H. F. C. **Introdução aos Problemas Inversos: Aplicações em Pesquisa Espacial**. Escola de verão em Computação Aplicada – LAC-INPE 2008. Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. 2008.
- VIRIEUX, J. *SH-wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite difference method*, **Geophysics**, v. 49, p. 1933–1942, 1984.
- VIRIEUX, J. *P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method*, **Geophysics**, v. 51, p. 889–901, 1986.
- VOGEL C. R. *Computational Methods for Inverse Problems*, 2002. SIAM.
- WHITE, D. J. *Two-dimensional seismic refraction tomography*. **Geophysical Journal**

International, v. 97, n. 2, p. 223–245, 1989. Disponível em: <<http://gji.oxfordjournals.org/content/97/2/223.abstract>>.

WOODWARD, M.; NICHOLS, D.; ZDRAVEVA, O.; WHITFIELD, P. e JOHNS, T. A *decade of tomography*. *Geophysics*, v. 73, n. 5, p. VE5–VE11, 2008. ISSN 0016-8033. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10- .1190/1.2969907](http://dx.doi.org/10.1190/1.2969907)>.

YANG, D.H.; LIU, E.; ZHANG, Z. e TENG, J., 2002. *Finite-difference modelling in two-dimensional anisotropic media using a flux corrected transport technique*, *Geophysical Journal International*, v. 148, n.2, p. 320-328, 2002. Disponível em <<https://doi.org/10.1046/j.0956-540x.2001.01575.x> >

YILMAZ, *Seismic data analysis*. Society of Exploration Geophysicists, 2001.

ZELT, C. A., HAINES, S., POWERS, M. H., SHEEHAN, J., ROHDEWALD, S., LINK, C., HAYASHI, K., ZHAO, D., ZHOU, H., BURTON, B. L., PETERSEN, U. K., BONAL, N. D. e DOLL, W. E. *Blind test of methods for obtaining 2D near-surface seismic velocity models from first-arrival traveltimes*. *Journal of Environmental & Engineering Geophysics*, v. 18, n. 3, p. 183-194, 2013. Disponível em: < 10.2113/JEEG18.3.183 >

ZHANG, J.; TOKSÖZ, M. *Nonlinear refraction traveltime tomography*. *Geophysics*, 1998. Society of Exploration Geophysicists, v. 63, n. 5, p. 1726–1737, 1998. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.1444468>>.

ZHDANOV, M. S. *Tutorial: Regularization in inversion theory: CWP Report*: Colorado School of Mines, 136, 47. 2002.